FI: JARO 2007 Verze: 14. května 2007

Přednášky k předmětu MB102

Přednášející: Roman Hilscher

Obsah

Přehled přednášek podle strany ukončení

1. Polynomy a interpolace

Touto kapitolou započneme budování nástrojů umožňujících modelování závislostí, které nejsou ani lineární ani diskrétní. S takovou potřebou se např. setkáme, kdykoliv popisujeme systém vyvíjející se v čase a to ne jen v několika vybraných okamžicích ale „souvisle“, tj. pro všechny možné okamžiky. Někdy je to přímo záměr či potřeba (třeba ve fyzikálních procesech), jindy je to vhodné přiblížení diskrétního modelu (třeba u ekonomických nebo populačních modelů).

Polynomem nad $\mathbb{R}$ rozumíme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané výrazem

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, jsou pevně daná čísla (koeficienty).

Pokud je $a_n \neq 0$, říkáme, že polynom f je stupně n. Stupěň nulového polynomu není definován.

Pro polynomy f stupně n a g stupně m, existují jednoznačně určené polynomy q a r takové, že stupeň r je menší než m nebo je $r = 0$ a $f = q \cdot g + r$. Je-li pro nějaký prvek $b \in \mathbb{R}$ hodnota $f(b) = 0$, pak to znamená, že v podílu $f(x) = q(x)(x - b) + r(x)$ musí být $r = 0$. Jinak by totiž nebylo možné dosáhnout $f(b) = q(b) \cdot 0 + r$, kde stupeň r je nulový. Říkáme, že b je kořen polynomu f. Stupeň q je pak právě $n - 1$. Pokud má q opět kořen, můžeme pokračovat a po nejvýše n krocích dojdeme ke konstatnímu polynomu. Dokázali jsme tedy, že každý nenulový polynom nad $\mathbb{R}$ má nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odtud již snadno dovodíme i následující pozorování.

Lemma 1. *Dva polynomy f a g nad $\mathbb{R}$ jsou si rovny (jako zobrazení), právě když mají shodné koeficienty.*

Důkaz. Předpokládejme $f = g$, tj. $f - g = 0$ jako zobrazení. Polynom $(f - g)(x)$ tedy má nekonečně mnoho kořenů, což je možné pouze tehdy, je-li nulovým polynomem. □

Příklad 1. Uvědomme si, že u konečných polí samozřejmě takové tvrzení neplatí. Uvažte např. polynom $p(x) = x^2 + x$ nad $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Potom je $p(0) = 0$ a $p(1) = 1 + 1 = 0$, ale $p(x)$ není nulový polynom. □

1.1. Interpolace.

Častá praktická úloha vyžaduje stanovení funkce (polynomu), pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných daných bodech $x_0, \ldots, x_n$. Pokud by šlo o nulové hodnoty, umíme přímo zadat polynom

$$f(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\, \ldots\, (x - x_n),$$

který bude mít nulové hodnoty právě v těchto bodech a nikde jinde. To ale není jediná odpověď, protože požadovanou vlastnost má i nulový polynom. Ten je přitom jediný s touto vlastností ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše n. Obdobně to dopadne i v obecném případě.

Věta 1. *Pro každnou množinu různých bodů $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ a předepsané hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ existuje právě jeden polynom f stupně nejvýše n (případně nulový polynom), pro který platí*

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Důkaz. Označme si prozatím neznámé koeficienty polynomu f stupně n
$$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$
Dosazením požadovaných hodnot dostaneme systém $n+1$ rovnic pro stejný počet neznámých koeficientů a_i
$$\begin{aligned} a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\ &\vdots \\ a_0 + x_n a_1 + \dots + (x_n)^n a_n &= y_n. \end{aligned}$$

Jak je dobře známo z MB101, tento systém lineárních rovnic má právě jedno řešení pokud je determinant jeho matice různý od nuly, Musíme tedy vyšetřit tzv. Vandermondův determinant
$$V(x_0,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^n \end{vmatrix}.$$
V demonstrativním cvičení k MB101 (viz Příklad 42 v souboru <demo_cviceni_il2.pdf>) jsme ukázali, že
$$V(x_0,\dots,x_n) = \prod_{\substack{i,j=0,\dots,n \\ i>j}} (x_i - x_j) \neq 0,$$
protože jsou body $x_0,\dots,x_n$ (po dvou) různé. Odtud ale vyplývá jednoznačná existence hledaného polynomu. Protože polynomy jsou jako zobrazení stejné, právě když mají stejné koeficienty, věta je dokázána. □

Jednoznačně určený polynom f z předchozí věty nazýváme interpolační polynom pro hodnoty y_i v bodech x_i.

Polynomy tvoří množinu funkcí jedné proměnné, kterou můžeme použít na proložení jakékoliv sady předem zadaných hodnot. Navíc se zdají být snadno vyjádřitelné, takže by s jejich pomocí mělo být dobře možné počítat i hodnoty těchto funkcí pro jakoukoliv hodnotu proměnné x. Při pokusu o praktické využití v tomto směru ovšem narazíme hned na několik problémů.

Prvním z nich je potřeba rychle vyjádřit polynom, kterým zadaná data proložíme. Pro řešení výše diskutovaného systému rovnic totiž budeme obecně potřebovat čas úměrný třetí mocnině počtu bodů, což při hustějších datech je jistě těžko přijatelné. Podobným problémem je pomalé vyčíslení hodnoty polynomu vysokého stupně v zadaném bodě. Obojí lze částečně obejít tak, že zvolíme vhodné vyjádření intepolačního polynomu (tj. vybereme lepší bázi příslušného vektorového prostoru všech polynomů stupně nejvýše n, než je ta standardní $1, x, x^2, \dots, x^n$).

1.2. **Lagrangeův interpolační polynom.** Sestrojíme si nejprve pomocné polynomy ℓ_i s vlastností
$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$
Zřejmě musí být tyto polynomy až na konstantu rovny výrazům
$$(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n),$$

a proto

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$

Hledaný Lagrangeův interpolační polynom pak snadno zadáme vzorcem

$$f(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x).$$

Toto vyjádření má nevýhodu ve velké citlivosti na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot x_i, protože se v ní těmito rozdíly dělí. Všimněme si ale, že přímá konstrukce Lagrangeova polynomu může nahradit existenční část důkazu v předchozí Větě 1.

Ještě horším problémem je velice špatná stabilita hodnot reálných nebo racionálních polynomů při zvětšující se hodnotě proměnné x. Brzy budeme mít nástroje na přesný popis kvalitativního chování funkcí, nicméně i bez nich je zřejmé, že podle znaménka koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu se hodnoty velice rychle při rostoucím x vydají buď do plus nebo do mínus nekonečna. Ani toto znaménko koeficientu u nejvyššího stupně se ale u interpolačního polynomu při malých změnách prokládaných hodnot nechová stabilně. Viz str. 129 ve skriptech nebo demonstrativní cvičení k MB101 (soubor <`interpolace.pdf`>).

Příklad 2. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(2) = 1, \quad P(3) = 0, \quad P(4) = -1, \quad P(5) = 6.$$

Řešení. Řešíme buď přímo, t.j. sestavením soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Předpokládáme polynom ve tvaru $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$. Víme, že polynom stupně nejvýše tři splňující podmínky v zadání je dán jednoznačně.

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 &= -1 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 6. \end{aligned}$$

Každá rovnice vznikla z jedné z podmínek v zadání.

Druhou možností je vytvořit hledaný polynom pomocí fundamentálních Lagrangeových polynomů:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1\cdot\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} + 0\cdot(\dots) + \\ &\quad + (-1)\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 6\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} \\ &= \frac{4}{3}x^3 - 12\,x^2 + \frac{101}{3}\,x - 29. \end{aligned}$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou samozřejmě jediným řešením výše sestavené soustavy lineárních rovnic. □

1.3. **Derivace polynomu.** Derivace polynomu je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{P}_n$ polynomů stupně nejvýše n do prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$ polynomů stupně nejvýše $n-1$ takové, že každý polynom x^k standardní báze je zobrazen na polynom kx^{k-1}. Tuto operaci značíme $'$.

Příklad 3.

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^{100})' = 100x^{99}, \quad (1)' = 0.$$

□

Z linearity tohoto zobrazení tedy plyne, že derivace polynomu

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$$

je polynom

$$P'(x) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \cdots + 2\, a_2\, x + a_1.$$

Druhá derivace polynomu je opět lineární zobrazení prostoru $\mathcal{P}_n$ do prostoru $\mathcal{P}_{n-2}$ definované jako iterace výše uvedeného zobrazení derivace. Tj. polynom x^k standardní báze je zobrazen na polynom $k(k-1)x^{k-2}$. Tuto operaci značíme $''$.

Příklad 4.

$$(x)'' = (1)' = 0, \quad (x^2)'' = (2x)' = 2, \quad (x^3)'' = (3x^2)' = 6x,$$
$$(x^{100})'' = (100x^{99})' = 9900x^{98}, \quad (1)'' = (0)' = 0.$$

□

Více se o derivacích (nejen polynomů) dozvíte později v tomto semestru.

1.4. **Hermiteův interpolační polynom.** Uvažme opět $m+1$ různých bodů $x_0, \ldots, x_m$, tj. $x_i \neq x_j$ pro všechna $i \neq j$. Předepišme dále hodnoty y_i a y_i' aproximované funkce a jejich derivací. To znamená, že máme předepsány hodnoty a první derivace v zadaných bodech x_i. Hledáme polynom f, který bude nabývat těchto předepsaných hodnot a derivací.

Zcela analogicky jako u interpolace pouhých hodnot obdržíme pro neznámé koeficienty polynomu $f(x) = a_n x^n + \ldots a_0$ systém rovnic

$$\begin{aligned}
a_0 + x_0 a_1 + \cdots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\
&\vdots \\
a_0 + x_m a_1 + \cdots + (x_m)^n a_n &= y_m \\
a_1 + 2x_0 a_2 + \cdots + n(x_0)^{n-1} a_n &= y_0' \\
&\vdots \\
a_1 + 2x_m a_2 + \cdots + n(x_m)^{n-1} a_n &= y_m'.
\end{aligned}$$

Toto je systém $2m+2$ rovnic pro $n+1$ neznámých. Volbou stupně hledaného polynomu $n = 2m+1$ bude determinant tohoto systému rovnic nenulový a tudíž bude existovat právě jedno řešení. Nalezený polynom nazýváme Hermiteův interpolační polynom.

Příklad 5. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P'(2) = 3.$$

Řešení. Máme $m = 1$ a hledáme polynom stupně $n = 2m+1 = 3$, tj. $P(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Dosazením za $x = 1$ a $x = 2$ do výrazu pro $P(x)$ a $P'(x)$ dostaneme systém

$$\begin{aligned} P(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0, \\ P(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3, \\ P'(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1, \\ P'(2) &= 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3. \end{aligned}$$

Vyřešením tohoto systému dostaneme $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$. □

Stejně jako při konstrukci Lagrangeova polynomu lze Hermiteův interpolační polynom zkonstruovat přímo pomocí tzv. fundamentálních Hermiteových polynomů. Podrobnosti viz skripta prof. Slováka.

Nejjednodušší případ je zadání hodnoty a derivace v jediném bodě. Tím určíme beze zbytku polynom stupně $n = 1$, tj.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

tj. právě rovnici přímky zadané hodnotou a směrnicí v bodě x_0.

Příklad 6. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 2, \quad P'(1) = 3.$$

Řešení.

$$P(x) = P(1) + P'(1) \cdot (x - 1) = 2 + 3(x - 1) = 3x - 1.$$

□

Když zadáme hodnotu a derivaci ve dvou bodech, tj. $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y_0'$, $f(x_1) = y_1$, $f'(x_1) = y_1'$ pro dva různé body x_0 a x_1, dostaneme ještě pořád snadno počítatelný problém. Ukažme si jej v zjednodušeném provedení, kdy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Příklad 7. Hledáme polynom stupně $n = 2m+1 = 3$, tj. $f(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Dosazením za $x = 0$ a $x = 1$ do výrazu pro $f(x)$ a $f'(x)$ dostaneme systém

$$f(0) = a_0 = y_0, \quad f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = y_1, \quad f'(0) = a_1 = y_0', \quad f'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = y_1'.$$

Tedy matice tohoto systému a její inverze mají tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Vypočtěte si tuto inverzi některou z metod z MB101!)

Přímým vynásobením $A \cdot (a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ pak vyjde vektor $(y_0, y_1, y_0', y_1')^T$, neboli

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1' \\ -3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1' \\ y_0' \\ y_0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1')\, x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1')\, x^2 + y_0' x + y_0.$$

□

Obdobně lze předepisovat libovolný konečný počet derivací v jednotlivých bodech a vhodnou volbou stupně polynomu obdržíme vždy jednoznačné interpolace.

Bohužel, u těchto interpolací pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky.

1.5. **Interpolace splajny.** Jak jsme viděli na obrázcích demonstrujících nestabilitu interpolace jedním polynomem dostatečně vysokého stupně, malé lokální změny hodnot zapřičiňovaly dramatické celkové změny chování výsledného polynomu. Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků, které ale musíme umět rozumně navazovat.

Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů lineárním polynomem. Tak se nejčastěji zobrazují data (tj. vzniká lomená čára). To znamená, že derivace budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změní. O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Takové polynomiální příblížení po kouscích už bude mít tu vlastnost, že derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímo se proto vnucuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně:

Definice 1 (Kubický splajn). Nechť $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ jsou reálné hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty $y_0, \dots, y_n$. Kubickým interpolačním splajnem pro toto zadání je funkce $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která splňuje následující podmínky:

- zúžení S na interval $[x_{i-1}, x_i]$ je polynom S_i třetího stupně, $i = 1, \dots, n$,
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a $S_i(x_i) = y_i$ pro všechny $i = 1, \dots n$,
- $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$,
- $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$.

□

Kubický splajn pro $n+1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n+(n-1)+(n-1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro derivace v krajních bodech, tzv. „úplný splajn“, nebo jsou tyto zadány jako nula, tzv. „přirozený splajn“.

Příklad 8. Zadání viz Příklad 2 (interpolace). Obr. viz. soubor <interpolace_a_splajn.pdf> □

Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermiteových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Při vhodném uspořádání se však dosáhne matice systému, která má nenulové prvky prakticky jen ve třech diagonálách, a pro takové existují vhodné numerické postupy, které umožní splajn počítat také v čase úměrném počtu bodů. Více ve skriptech prof. Slováka.

1.6. **Rozklad na parciální zlomky.** Jsou-li $P(x)$ a $Q(x)$ polynomy, $Q(x) \not\equiv 0$ (t.j. polynom Q není identicky roven nulovému polynomu), potom se výraz

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{nazývá } \underline{\text{racionální lomenou funkcí}}.$$

Je-li $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, pak $R(x)$ nazýváme ryze lomenou.

Pokud nemají polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ společný kořen (tj. ve funkci $R(x)$ již nejde žádný výraz s proměnnou x pokrátit), potom každou takovou ryze racionální lomenou funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků. Tento součet je až na pořadí jednotlivých zlomků určen jednoznačně.

Tvar jednotlivých parciálních zlomků najdeme podle kořenů a násobností jmenovatele, tj. podle funkce $Q(x)$. Elementární kořenové činitele polynomu $Q(x)$ lze nad $\mathbb{R}$ uvažovat buď lineární (odpovídající reálným kořenům) nebo kvadratické (odpovídající dvojicím komplexně sdružených komplexních kořenů).

- Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ reálný kořen násobnosti k, potom polynom $Q(x)$ obsahuje činitel $(x-\alpha)^k$, a příslušné parciální zlomky jsou tvaru
$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^{k-2}} + \cdots + \frac{A_k}{x-\alpha}.$$
- Je-li $\beta \pm \gamma i \in \mathbb{C}$ dvojice komplexně sdružených komplexních kořenů násobnosti k (každý z nich), potom polynom $Q(x)$ obsahuje činitel $(x^2+px+q)^k$, jehož diskriminant je záporný, a příslušné parciální zlomky jsou tvaru
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+px+q)^{k-2}} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{x^2+px+q}.$$

Je nutné vždy zahrnout všechny parciální zlomky (až so stupně k)!

Příklad 9.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^2+7x+1}{x\,(x-1)^3\,(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Gx+H}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

□

Neznáme koeficienty u parciálních zlomků hledáme buď převodem nazpět na společného jmenovatele a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin (což vede na systém lineárních rovnic), nebo jednodušeji dosadíme za proměnnou x hodnoty kořenů polynomu $Q(x)$.

Příklad 10.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x+1}{(x-1)\,(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A\,(x-2)^2 + B\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x-2)}{(x-1)\,(x-2)^2} \end{aligned}$$

Porovnáváme polynomy v čitateli:

$$x+1 = A\,(x-2)^2 + B\,(x-1) + C\,(x-1)\,(x-2).$$

Volbou $x = 1$ dostaneme $A = 2$, volbou $x = 2$ dostaneme $B = 3$. Další kořeny již jmenovatel nemá, zvolíme proto libovolnou jinou „jednoduchou“ hodnotu, např. $x = 0$ a dostaneme $4A - B + 2C = 1$, tj. $C = -2$. Je tedy

$$R(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2}.$$

□

2. Diferenciální počet

2.1. Reálná čísla. Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů, viz skripta prof. Slováka. Zejména si z MB101 zopakujte pojmy suprema a infima, se kterými budeme pracovat.

2.2. Supremum a infimum v $\mathbb{R}$. Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\underline{\text{horní závorou}} \text{ množiny } A, \text{ pokud } \forall\, x \in A: \ x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje dolní závora množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.

Řekneme, že množina A je shora ohraničená (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje zdola ohraničená (zdola omezená) množina A. Množina A je ohraničená (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.

Nejmenší horní závora množiny A se nazývá supremum množiny A. Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je supremum množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \ x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako

$$b = \sup A.$$

Obdobně se definuje infimum množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme

$$a = \inf A.$$

Příklad 11. Je-li A libovolný z intervalů $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ nebo $(0,1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

$\square$

Má-li množina A největší prvek b (tj. všechny ostatní prvky jsou menší než b), potom je $b = \sup A$. Podobně, má-li množina A nejmenší prvek a (tj. všechny ostatní prvky jsou menší než a), potom je $a = \inf A$. Výhoda suprema či infima oproti největšímu či nejmenšímu prvku spočívá v tom, že největší či nejmenší prvek nemusí v A existovat, i když je množina A ohraničená, ale supremum a infimum existují vždy.

Axiom 1.

(i) Každá neprázdná shora ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}$ má supremum.
(ii) Každá neprázdná zdola ohraničená množina $A \subseteq \mathbb{R}$ má infimum.

Tyto axiomy zaručují, že v množině reálných čísel nejsou žádné „díry“. Navíc lze jednoduše dokázat, že tvrzení (i) a (ii) jsou navzájem ekvivalentní, tj. stačí mít k dispozici jen jeden z nich, a ten druhý pak již platí automaticky.

2.3. **Intervaly.** Budeme se striktně držet značení, že uzavřený interval je označen hranatými zaávorkami $[a, b]$ (krajní body tam patří), zatímco otevřený interval je označen kulatými zaávorkami (a, b) (krajní body tam nepatří). Podobně budeme uvažovat polouzavřené intervaly $[a, b)$ a $(a, b]$.

Nekonečné intervaly (neohraničené zdola nebo shora) značíme jako

$$(-\infty, \infty), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, b).$$

Symbol $-\infty$ a ∞ do intervalu nikdy nepatří, je to jen značení, že do intervalu patří libovolně velké záporné či kladné body.

`Konec 1. přednášky (19.2.2007)`

Definiční obor funkce $f(x)$ budeme značit symbolem $\mathcal{D}(f)$, obor hodnot pak symbolem $\mathcal{H}(f)$.

2.4. **Limita.** V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) „blíží“ k nějakému číslu či k $\pm\infty$. To pak přirozeně vede k zavedení pojmu „limita“.

Příklad 12.

(a) K přiblížení pojmu „limita“ může dobře posloužit již známý pojem infima či suprema. V Příkladu 11 jsme ukázali, že

$$0 = \inf(0, 1), \quad 1 = \sup(0, 1),$$

a přitom ani jedno z čísel 0, 1 v množině $(0, 1)$ neleží. Uvažujme posloupnost bodů

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \in (0, 1)$$

pro zvyšující se n. Potom vidíme, že se hodnoty této posloupnosti „nekonečně blíží“ k hodnotě infima (k nule), ale nikdy této hodnoty nedosáhnou. Podobně toto platí pro posloupnost

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \in (0, 1)$$

a hodnotu suprema (jedničku).

(b) Naopak, členy posloupnosti

$$\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

se „nekonečně blíží“ k $+\infty$ (ale nikdy této „hodnoty“ nedosáhnou), stejně tak jako členy posloupnosti

$$\{-n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

se „nekonečně blíží“ k $-\infty$ (ale nikdy této „hodnoty“ nedosáhnou).

(c) Podobně se funkční hodnoty funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ „nekonečně blíží“ k číslu 0 když se nezávislá proměnná x zvyšuje k $\pm\infty$ (viz obr.).

□

Intuitivní definice limity: „Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ libovolně blíží k číslu L, když je x dostatečně blízko k x_0.“ Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Příklad 13. Uvádíme různé „druhy“ limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme (viz obr.)

$$\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x+1) = \infty.$$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme (viz obr.)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$$

□

Označení . $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Body $x \in \mathbb{R}$ se nazývají vlastní body, body $x = \pm\infty$ se nazývají nevlastní body.

Definice 2 (Okolí bodu). Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 je otevřený interval s vlastností (viz obr.)

$$\mathcal{O}(x_0) = \begin{cases} (x_0-\delta, x_0+\delta), & \text{je-li } x_0 \in \mathbb{R},\\ (a,\infty), & \text{je-li } x_0 = \infty \ (a \in \mathbb{R}),\\ (-\infty, b), & \text{je-li } x_0 = -\infty \ (b \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Množina $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ (pro $x_0 \in \mathbb{R}$) se nazývá ryzí (též prstencové) okolí bodu x_0.

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme pravé okolí bodu x_0 jako interval $[x_0, x_0+\delta)$ a levé okolí bodu x_0 jako interval $(x_0-\delta, x_0]$. Podobně je pravé ryzí okolí bodu x_0 interval $(x_0, x_0+\delta)$ a levé ryzí okolí bodu x_0 interval $(x_0-\delta, x_0)$. □

Definice 3 (Limita). Buď $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, píšeme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že

$$\text{pro všechna } x \in \mathcal{O}(x_0)\setminus\{x_0\} \ \text{ je } \ f(x) \in \mathcal{O}(L). \tag{1}$$

□

To, že v podmínce (1) požadujeme, aby $\boxed{x \neq x_0}$, znamená, že

limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě x_0!

Interpretace Definice 3 záleží na tom, jestli je x_0 a L vlastní nebo nevlastní bod.

Definice 4 (Vlastní limita ve vlastním bodě). Buď $x_0, L \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ (toto číslo ε určuje okolí $\mathcal{O}(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ bodu L) existuje $\delta > 0$ (toto číslo δ určuje okolí $\mathcal{O}(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ bodu x_0) takové, že

$$\text{pro všechna } x \text{ taková, že } \underbrace{0 < |x-x_0| < \delta}_{x\in\mathcal{O}(x_0)\setminus\{x_0\}} \ \text{ je } \ \underbrace{|f(x)-L| < \varepsilon}_{f(x)\in\mathcal{O}(L)}. \tag{2}$$

□

Zkráceně lze Definici 4 přepsat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Příklad 14. Ukažte z definice, že $\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10$, viz obr.

Řešení. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $\delta > 0$ takové, aby $|y - 10| < \varepsilon$, kdykoliv bude $0 < |x - 3| < \delta$. Tedy

$$\big|(3x+1) - 10\big| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |3x - 9| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{\delta := \frac{\varepsilon}{3}}$, případně libovolné jiné δ splňující $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{3}$. □

Definice 5 (Vlastní limita v nevlastním bodě). Buď $x_0 = \infty$, $L \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ (toto číslo ε určuje okolí $\mathcal{O}(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ bodu L) existuje $a > 0$ (toto číslo a určuje okolí $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ bodu ∞) takové, že

$$\text{pro všechna } \underbrace{x > a}_{x\in\mathcal{O}(\infty)} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x)\in\mathcal{O}(L)}. \tag{3}$$

Buď $x_0 = -\infty$, $L \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ (toto číslo ε určuje okolí $\mathcal{O}(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ bodu L) existuje $b < 0$ (toto číslo b určuje okolí $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, b)$ bodu $-\infty$) takové, že

$$\text{pro všechna } \underbrace{x < b}_{x\in\mathcal{O}(-\infty)} \text{ je } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x)\in\mathcal{O}(L)}. \tag{4}$$

□

Příklad 15. Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, viz obr.

Řešení. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{x} < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{a := \frac{1}{\varepsilon}}$, případně libovolné jiné a splňující $a \ge \frac{1}{\varepsilon}$. □

Příklad 16. Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Řešení. Ukáže se, že je tato posloupnost rostoucí a shora ohraničená a tudíž má limitu. Tuto limitu označujeme symbolem e a nazýváme ji Eulerovým číslem (základ přirozených logaritmů). Je tedy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}.$$

Více ve skriptech prof. Slováka (str. 153–154). □

Podobně interpretujeme
- nevlastní limitu ve vlastním bodě ($x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$),
- nevlastní limitu v nevlastním bodě ($x_0 = \pm\infty$, $L = \pm\infty$).

Ve vlastních bodech x_0 se můžeme blížit k bodu x_0 také jen zprava nebo jen zleva, tj. v Definici 3 použijeme v podmínce (1) pouze pravé ryzí okolí bodu x_0 nebo pouze levé ryzí okolí bodu x_0. Dostáváme pak pojmy limity zprava a limity zleva:

Definice 6 (Limita zprava/zleva). Buď $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zprava rovnu číslu L, píšeme

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0, x_0+\delta) \ \text{ je } \ f(x) \in \mathcal{O}(L). \tag{5}$$

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu číslu L, píšeme

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\text{pro všechna } x \in (x_0-\delta, x_0) \ \text{ je } \ f(x) \in \mathcal{O}(L). \tag{6}$$

□

Příklad 17.

(a) Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ („signum"=znaménko, viz obr.) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0, \\ -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

(b) Pro funkci $\frac{1}{x}$ platí (viz obr.)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

□

A kdy limita neexistuje? Pokud má funkce v bodě x_0 a jeho okolí následující chování:

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz Příklad 17(a)),
- „nekonečný“ skok – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz Příklad 17(b)),
- oscilace – např. funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$, viz obr.

Příklad 18. Funkce

$$q(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \quad (\text{tj. pro } x \text{ racionální}), \\ 0, & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \quad (\text{tj. pro } x \text{ iracionální}), \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, protože v libovolném okolí zvoleného bodu x_0 se nacházají jak racionální tak iracionální čísla a tedy tato funkce zde nabývá hodnot 1 i 0 (a tedy zde nemůže mít limitu). □

V následujícím si přiblížíme některé základní vlastnosti limit.

Věta 2 (Vlastnosti limit).
(i) *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*
(ii) *Má-li $f(x)$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom je $f(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.*
(iii) *Limita existuje právě když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Věta 3 (Vlastnosti limit). *Jsou-li*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = M,$$

kde $L, M \in \mathbb{R}$ (pouze vlastní limity!) a $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom

$$\lim_{x\to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = L \pm M, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,.\,g(x) = L\,.\,M, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \qquad \text{pokud } M \neq 0, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to x_0} \big|f(x)\big| = \Big|\lim_{x\to x_0} f(x)\Big| = |L|. \tag{10}$$

Věta 4 (O třech limitách). *Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Je-li $g(x) \le f(x) \le h(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 a je-li*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ a je rovna číslu L, tj.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Příklad 19. Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Protože je funkce $\sin x$ ohraničená (jedničkou shora a mínus jedničkou zdola), pro $x \neq 0$ platí nerovnosti

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

A protože $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, existuje podle Věty 4 také limita funkce $x \sin \frac{1}{x}$ a platí

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

□

Poznámka 1. Všechny vlastnosti limit uvedené ve Větách 2, 3 a 4 platí i pro jednostranné limity, tj. pro limity zprava a zleva. □

Poznámka 2. Pro výpočet limit používáme značení pro „typ" dané limity, např. $\left|\text{typ } \frac{0}{0}\right|$, $\left|\text{typ } \frac{k}{0}\right|$, $\left|\text{typ } \frac{k}{\infty}\right|$, $\left|\text{typ } \frac{\infty}{\infty}\right|$, atd. Typ dané limity zjistíme tak, že dosadíme do daného výrazu přímo limitní hodnotu $x = x_0$. Kupříkladu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \quad \left|\text{typ } \frac{0}{8}\right| = 0.$$

□

2.5. **Spojitost.** Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny „důležité" vlastnosti.

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tyto dvě čísla jsou si rovny, tj. pokud

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Spojitost zprava a spojitost zleva v bodě x_0 se definuje stejně, ale s pomocí jednostranné limity, tj.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Příklad 20. Funkce (viz obr.)

$$f(x) := \begin{cases} 2 - x, & \text{pro } x \in [0,1), \\ 2, & \text{pro } x \in [1,2), \\ 1, & \text{pro } x = 2, \\ 2, & \text{pro } x \in [2,3], \\ 5 - x, & \text{pro } x \in (3,4), \\ 2, & \text{pro } x = 4, \end{cases}$$

je

- spojitá v každém bodě $x \in [0,4]$ kromě $x = 0, 1, 2, 4$,
- spojitá zprava v každém bodě $x \in [0,4]$ kromě $x = 2, 4$,
- spojitá zleva v každém bodě $x \in [0,4]$ kromě $x = 0, 1, 2, 4$.

□

Věta 5 (Vlastnosti spojitých funkcí).

(i) *Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce*

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \ \textit{pro}\ g(x_0) \neq 0.$$

(ii) *(Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom*

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x) \Big) = f(M).$$

(iii) *(Spojitost složené funkce.) Je-li funkce $g(x)$ spojitá v bodě x_0 a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom je složená funkce $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ spojitá v bodě x_0.*

Všimněte si, že vlastnost (10) je speciálním případem Věty 5(ii), protože je $|x|$ spojitá funkce.

Příklad 21. Ve Větě 5(ii) může existovat $\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big)$ i v případě, že $\lim_{x \to x_0} g(x)$ neexistuje. Např. pro $g(x) = \operatorname{sgn} x$ a $f(y) = y^2$ platí, že $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje, ale přesto je

$$\lim_{x \to 0} f\big(g(x)\big) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

□

Příklady spojitých funkcí:

- konstantní funkce $f(x) = C$ (v každém bodě $x \in \mathbb{R}$),
- polynom $P(x)$ (v každém bodě $x \in \mathbb{R}$),
- racionální lomená funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (v každém bodě $x \in \mathcal{D}(R)$, tj. v každém bodě x, kde $Q(x) \neq 0$),
- trigonometrické funkce (všude, kde jsou definovány).

Spojitost funkcí lze dobře využít k výpočtu limit – prostým dosazením.

Příklad 22.

$$\lim_{x \to -1} (x^2 + 2x) = (-1)^2 + 2(-1) = -1, \qquad \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

□

V následujících příkladech uvádíme tzv. základní limity.

Příklad 23. Určete

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \text{(viz obr.)}.$$

A protože je pro tato x hodnota $\sin x > 0$, je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{tj.} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce $\cos x$ spojitá (v nule), obě strany nerovnosti se pro $x \to 0^+$ blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách (Věta 4) je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Protože je funkce $\frac{\sin x}{x}$ sudá, exsituje také limita zleva a je rovna 1, tj.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \quad \overset{\text{Věta 2(iii)}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}. \tag{11}$$

□

Příklad 24. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}}\right) = 1\,.\,0\,.\,\frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Proto je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}. \tag{12}$$

□

Příklad 25. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pomocí nerovnosti

$$1 + \frac{x}{x+1} < e^x < 1 + \frac{x}{1-2x}, \qquad \text{pro } x \in (0, \tfrac{1}{2}),$$

neboli (viz. soubor <limita_e_na_x.pdf>)

$$\frac{1}{x+1} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}, \qquad \text{pro } x \in (0, \tfrac{1}{2}),$$

dostaneme z věty o třech limitách (Věta 4), že

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Podobně, platí

$$\frac{1}{1-2x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{x+1}, \qquad \text{pro } x \in (-\tfrac{1}{2}, 0),$$

a tedy podle věty o třech limitách (Věta 4) platí

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Celkově tedy podle Věty 2(iii) je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}. \tag{13}$$

□

Příklad 26. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Řešení. Z Příkladu 25 máme, že pro malé x je $e^x - 1 \approx x$, tedy je $e^x \approx 1 + x$. Logatitmováním obou stran dostaneme, že $x \approx \ln(1+x)$. Tedy platí, že

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}. \tag{14}$$

□

Příklad 27. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pomocí rovnosti $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\to 1} \cdot \ln a = \ln a,$$

a tedy je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}. \tag{15}$$

Všimněte si, že nyní je limita (13) speciálním případem limity (15) pro $a = e$. □

Příklad 28. Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

Řešení. Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Pomocí rovnosti $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a},$$

a tedy je

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}}. \tag{16}$$

Všimněte si, že nyní je limita (14) speciálním případem limity (16) pro $a = e$. $\square$

Spojitost na intervalu – Buď $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I, je-li spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a patří-li levý/pravý krajní bod do intervalu I, je v něm $f(x)$ spojitá zprava/zleva. Píšeme

$$f \in C(I), \quad \text{případně} \quad f \in C[a,b], \quad \text{pokud } I = [a,b].$$

(Písmeno „C“ pochází z anglického continuous=spojitý.)

Příklad 29.

(a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (viz obr.), $f(x)$ je spojitá na intervalu $[-2,2]$, tj. $f \in C[-2,2]$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ (viz obr.), $f(x)$ je spojitá na intervalu $(-\infty,0)$, na intervalu $(0,\infty)$, ale není spojitá na intervalu $(-\infty,\infty)$ (na $\mathbb{R}$).

(c) Všimněte si, že spojitost funkce na intervalech $(-\infty,0)$ a $[0,\infty)$ stále ještě nemusí stačit pro spojitost na celém $\mathbb{R}$. Např. funkce (viz obr.)

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0, \\ 1, & \text{pro } x \geq 0, \end{cases}$$

je spojitá na každém z intervalů intervalech $(-\infty,0)$ a $[0,\infty)$, ale není spojitá na $\mathbb{R}$.

$\square$

Věta 6 (Weierstrassova). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a,b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty (viz obr.).*

Důkaz. Je založen na principu suprema a infima. $\square$

Poznámka 3. Žádná z podmínek ve Větě 6 nemůže být vypuštěna, protože by pak existence nejmenší nebo největší hodnoty v daném intervalu nemusela být zaručena, jak ukazují následující příklady.

(a) Interval musí být konečný. Např. $f(x) = x$ na uzavřeném intervalu $[0,\infty)$ nabývá své minimum v bodě $x = 0$, ale nenabývá zde své maximum. Navíc je tato funkce neohraničená. (Viz obr.)

(b) Interval musí být uzavřený. Např. $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0,1]$ nabývá své minimum v bodě $x = 1$, ale nenabývá zde své maximum. Navíc je tato funkce neohraničená. (Viz obr.)

(c) Interval musí být uzavřený. Např. $f(x) = x$ na intervalu $(0,1)$ nenabývá v tomto intervalu své minimum ani své maximum, ale tato funkce je ohraničená. (Viz obr.)

$\square$

Věta 7 (**Bolzanova**). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a,b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom $f(x)$ nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou (viz obr.). Tj. označíme-li $m := \min f(x)$ a $M := \max f(x)$, potom pro každou hodnotu $y \in [m, M]$ existuje (alespoň jedno) $c \in [a,b]$ tak, že platí $f(c) = y$.*

Volbou $y = 0$ v předchozí větě dostaneme následující.

Důsledek 1. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a,b]$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, pak existuje bod $c \in (a,b)$ tak, že platí $f(c) = 0$, tj. rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a,b) alespoň jedno řešení (viz obr.).*

Věta 8 (**O spojitosti inverzní funkce**). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (tj. stále „roste" nebo stále „klesá") na intervalu I, potom je také inverzní funkce $f^{-1}(x)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $J := f(I)$.*

Z výše uvedené věty plyne spojitost cyklometrických funkcí $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, a dále spojitost logaritmických funkcí.

`Konec 2. přednášky (26.2.2007)`

2.6. **Body nepojitosti.** Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

1. Odstranitelná nespojitost – existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze „odstranit" předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

   Příklad 30.
   (a) Funkce
   $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$
   má v bodě $x_0 = 2$ odstanitelnou nespojitost (v podstatě je $f(x) = x + 2$ pro $x \neq 2$).

   (b) Funkce
   $$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
   má v bodě $x_0 = 0$ odstanitelnou nespojitost.

   □

2. Skok (též nespojitost prvního druhu) – existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

   Příklad 31. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok. □

3. Nespojitost druhého druhu – alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

Příklad 32. Funkce
$$f(x)=\frac{1}{x^2}, \qquad f(x)=\sin\frac{1}{x}$$
mají v bodě $x_0=2$ nespojitost druhého druhu. $\square$

2.7. **Derivace.** Jako motivaci uveďme výpočet následujících limit.

Příklad 33.

(a)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\,(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

(b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

(c)
$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\,(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0.$$

$\square$

Příklad 34.

(a)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\,(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x}=-1.$$

(b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{\frac{x-2}{1}}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x\,(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{4}.$$

(c)
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}\left|\text{typ }\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0-x}{x\,x_0}}{\frac{x-x_0}{1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{x\,x_0\,(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{x\,x_0}=-\frac{1}{x_0^2}.$$

$\square$

Definice 7 (Derivace). Nechť $x_0\in\mathcal{D}(f)$. Pokud existuje
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad\text{(vlastní nebo nevlastní)},\tag{17}$$
nazýváme tuto limitu derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$. Je-li tato limita nevlastní (tj. $\pm\infty$), nazývá se $f'(x_0)$ nevlastní derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0. $\square$

Jiná terminologie je diferencovatelnost funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Co je to vlastně „derivace“ v bodě x_0?

1. Analyzujme difereční podíl (viz obr.)
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\operatorname{tg}\varphi=\frac{\text{směrnice sečny procházející body}}{M=[x_0,f(x_0)] \text{ a } N=[x,f(x)]}$$

2. Pokud se x blíží k x_0 (tj. bod N se blíží k bodu M), sečna MN se stává tečnou v bodě M, a tedy je
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\boxed{\underline{\text{směrnice tečny}}}\text{ v bodě } M=[x_0,f(x_0)].$$

Příklad 35. Funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ má v bodě $x_0=1$ tečnu, která má směrnici $a=-1$. A proto je také $f'(1)=-1$, srovnejte s Příkladem 34(a). □

Poznámka 4.

(i) Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.

(ii) Pokud nahradíme limitu ve výrazu (17) jednostrannými limitami, dostaneme definici derivace zprava a derivace zleva v bodě x_0, tj.
$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\qquad f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
Zřejmě pak $f'(x_0)$ existuje $\Leftrightarrow$ existují $f'_-(x_0)$ a $f'_+(x_0)$ a tyto jednostranné derivace jsou si rovny.

(iii) Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.

(iv) Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).

(v) Položíme-li $h:=x-x_0$, dostaneme
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}. \tag{18}$$

(vi) Aby mohla mít funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0, musí být definována na nějakém okolí bodu x_0 (včetně bodu x_0)!

(vii) $f'(x_0)$ někdy píšeme jako $\frac{df}{dx}(x_0)$, nebo jako $f'(x)\big|_{x=x_0}$.

□

Poznámka 5. Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0,f(x_0)]$ je pak
$$y-y_0=f'(x_0)\,(x-x_0),\qquad \text{kde } y_0=f(x_0).$$

□

Příklad 36. Určete směrnici tečny a rovnici tečny funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 2$.

Řešení. Z Příkladu 34(b) víme, že $f'(2) = -\frac{1}{4}$, tedy směrnice tečny v bodě $x_0 = 2$ je $a = -\frac{1}{4}$.

Protože je $f(2) = \frac{1}{2}$, je podle Poznámky 5 rovnice tečny v bodě $x_0 = 2$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\,(x-2), \qquad \text{tj.} \qquad y = -\frac{1}{4}\,x + 1.$$

□

Příklad 37. V Příkladech 33 a 34 jsme vlastně odvodili vztahy

$$(x^2)'\big|_{x=x_0} = 2x_0, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)'\bigg|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

□

Z geometrické vlastnosti, že derivace je směrnice tečny, můžeme tedy odvodit následující pravidla:

$$(x)'\big|_{x=x_0} = 1, \qquad (ax+b)'\big|_{x=x_0} = a, \qquad (k)'\big|_{x=x_0} = 0.$$

Příklad 38.

$$(x^3)'\big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\,(x^2 + x\,x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^2 + x\,x_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

□

Podobně lze odvodit takové pravidlo pomocí binomického rozvoje pro $(x-x_0)^n$ pro funkci x^n (kde $n \in \mathbb{N}$), tj.

$$(x^n)'\big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \cdots = n x_0^{n-1}, \qquad \text{tj.} \qquad \boxed{(x^n)'\big|_{x=x_0} = n x_0^{n-1}}. \tag{19}$$

Porovnejte tento výsledek s definicí derivace polynomu v odstavci 1.3.

Příklad 39. Určete derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodech $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.

Řešení. Zřejmě je $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$. Pro $x_0 > 0$ je

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)\,(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}.$$

Pro $x_0 = 0$ derivace neexistuje (je to krajní bod definičního oboru, a tudíž v něm neexistuje limita – existuje zde pouze limita zprava). Vypočtěme tedy derivaci zprava:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ tedy má v počátku nevlastní pravostrannou derivaci $f'_+(0) = \infty$, neboli tečna v bodě $x_0 = 0$ je svislá přímka. □

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na „proměnnou", potom můžeme derivaci chápat jako zobrazení, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Příklad 40. V Příkladu 39 je $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ a $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$, přestože $f'_+(0)$ existuje (ale jen jako nevlastní derivace). □

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě množiny (např. intervalu) I, pak říkáme, že $f(x)$ je diferencovatelná na I. Např. x^n je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, nebo $\frac{1}{x}$ je diferencovatelná na $(0, \infty)$ a na $(-\infty, 0)$.

Normála ke grafu v bodě x_0 je přímka, která prochází bodem $[x_0, f(x_0)]$ a je kolmá na tečnu (viz obr.). Je-li a_1 směrnice tečny a a_2 směrnice normály, potom platí vztah

$$\boxed{a_1 \,.\, a_2 = -1}\,.$$

Příklad 41. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^4$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení. Tečna: Protože je směrnice tečny v bodě $x_0 = 1$ rovna $f'(1) = (4x^3)\big|_{x=1} = 4$ a protože je $f(1) = 1$, podle Poznámky 5 je rovnice tečny

$$y - 1 = 4\,(x - 1), \qquad \text{tj.} \qquad y = 4x - 3.$$

Normála: Protože je směrnice normály v bodě $x_0 = 1$ rovna $a_2 = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$ a protože i normála (stejně jako tečna) prochází bodem $[x_0, f(x_0)] = [1, 1]$, je rovnice normály

$$y - 1 = -\frac{1}{4}\,(x - 1), \qquad \text{tj.} \qquad y = -\frac{1}{4}\,x + \frac{5}{4}.$$

□

Příklad 42. Určete zda má funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ derivaci.

Řešení.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x \qquad \ldots \underline{\text{limita neexistuje}}.$$

Funkce $|x|$ nemá v počátku derivaci. Pochopitelně, protože míti derivaci = míti (právě jednu) tečnu.

Na druhou stranu, můžeme vypočítat jednostranné derivace v počátku:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} (-1) = -1.$$

Tedy tyto jednostranné derivace jsou různé, a proto podle Poznámky 4(ii) neexistuje $f'(0)$. □

Derivace v praxi

1. Je-li $s(t)$ poloha hmotného bodu na přímce v čase t, potom je výraz
$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$
roven průměrné rychlosti za časový úsek $[t_0, t]$. Zřejmě je pak
$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$
rychlost v okamžiku t_0, a tedy je
$$v(t) = s'(t), \qquad \boxed{\text{rychlost je derivace dráhy}}.$$
Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost $v(t)$ má znaménko, tj. $v(t) > 0$ ve směru pohybu, kdy se $s(t)$ zvětšuje a $v(t) < 0$, když se $s(t)$ zmenšuje.

2. Protože je zrychlení $a(t)$ změna rychlosti, podobně platí, že
$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$
je zrychlení v okamžiku t_0, a tedy je
$$a(t) = v'(t), \qquad \boxed{\text{zrychlení je derivace rychlosti}}.$$

3. Protože platí, že
$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$
je
$$P(t) = W'(t), \qquad \boxed{\text{výkon je derivace práce}}.$$

4. Protože platí, že
$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna napětí}}{\text{změna času}},$$
je
$$I(t) = U'(t), \qquad \boxed{\text{proud je derivace napětí}}.$$

2.8. **Vlastnosti a pravidla derivací.** V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

Věta 9. *Má-li $f(x)$ v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.*

Důkaz. Chceme ukázat, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Protože existuje vlastní $f'(x_0)$ je
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \Bigg(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \Bigg)$$
$$= f'(x_0) \,.\, 0 + f(x_0) = f(x_0).$$
Je tedy $f(x)$ spojitá v bodě x_0. □

Z Věty 9 plyne, že pokud je funkce $f(x)$ nespojitá v bodě x_0, pak v něm nemůže mít derivaci.

Příklad 43. Funkce $\operatorname{sgn} x$ je nespojitá v počátku, a proto zde nemá (vlastní) derivaci. □

Pozor! Opačné tvrzení k Větě 9 neplatí, tj. ze spojitosti v x_0 neplyne existence derivace v bodě x_0. Příkladem je funkce $|x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Pokud má funkce nevlastní derivaci v bodě x_0, tak stále ještě může být spojitá v x_0. Obecné pravidlo jako ve Větě 9 ale k dispozici nemáme.

Příklad 44.

(a) Funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je zřejmě spojitá v bodě $x_0 = 0$ (dokonce na celém $\mathbb{R}$). Přitom

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left| \text{typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty.$$

Tato funkce má tedy v počátku nevlastní derivaci (tečna je svislá přímka = osa y, viz obr.) a přitom je spojitá.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je nespojitá v bodě $x_0 = 0$. Přitom

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \left| \text{typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} \left| \text{typ } \frac{-1}{0^-} \right| = \infty,$$

a tedy také $f'(0) = \infty$ existuje. Tato funkce má tedy v počátku nevlastní derivaci a přitom je zde nespojitá (nemá tečnu v počátku).

□

Věta 10 (Pravidla pro derivace).

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\big[c \cdot f(x)\big]' = c \cdot f'(x).$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\big[f(x) \pm g(x)\big]' = f'(x) \pm g'(x).$$

(iii) *Pravidlo součinu:*

$$\big[f(x) \,.\, g(x)\big]' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x).$$

(iv) *Pravidlo podílu:*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \,.\, g(x) - f(x) \,.\, g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Důkaz. Pravidla (i) a (ii) jsou triviální z definice derivace (jako limity). Ukážeme pravidlo součinu:

$$\begin{aligned}
(f \,.\, g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \,.\, g(x) - f(x_0) \,.\, g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \,.\, g(x) - f(x_0) \,.\, g(x) + f(x_0) \,.\, g(x) - f(x_0) \,.\, g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right\} \\
&= f'(x_0) \,.\, g(x_0) + f(x_0) \,.\, g'(x_0),
\end{aligned}$$

přičemž jsme použili Větu 9 pro spojitost funkce $g(x)$ v bodě x_0. Pravidlo podílu se ukáže podobně, jako pravidlo součinu. $\square$

Příklad 45.

$$(2x^3+3x+1)' = 2(x^3)' + 3(x)' + (1)' = 2\,.\,3x^2 + 3\,.\,1 + 0 = 6x^2+3,$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' &= \frac{(x^2+1)'\,(x^2-1)-(x^2+1)\,(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}\\ &= \frac{2x\,(x^2-1)-(x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\,.\,x^2\right)' &= (\sqrt{x})'\,.\,x^2 + \sqrt{x}\,.\,(x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.\,x^2 + \sqrt{x}\,.\,2x\\ &= \frac{1}{2}\,x^{\frac{3}{2}} + 2\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\,\sqrt{x^3}.\end{aligned}$$

Všimněte si, že poslední uvedený příklad má na levé straně $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'$. $\square$

Příklad 46. Uvažujme soukolí tří ozubených kol, přičemž kolo A má 12 zubů, kolo B má 4 zuby a kolo C má 6 zubů (viz obr.). Jestliže kolo A udělá y otáček, kolo B udělá u otáček a kolo C udělá x otáček, potom platí

$$y = \frac{1}{3}\,u, \qquad u = \frac{3}{2}\,x, \qquad \text{a tedy je} \qquad y = \frac{1}{3}\,u = \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,x = \frac{1}{2}\,x.$$

Velikost změny y ke změně u je zřejmě $\frac{1}{3}$, velikost změny u ke změně x je zřejmě $\frac{3}{2}$, a proto velikost změny y ke změně x je $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Ukázali jsme tedy, že při <u>skládání funkcí</u> se velikost změn (= derivace) <u>násobí</u>. $\square$

Věta 11 (Derivace složené funkce). *Má-li funkce $y=f(u)$ derivaci v bodě $u_0 := g(x_0)$ a funkce $u=g(x)$ derivaci v bodě x_0, potom má <u>složená funkce</u> $y=(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(f\circ g)'(x) = f'(u_0)\,.\,g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)\,.\,g'(x_0).$$

Příklad 47. Určete derivaci funkce $\sqrt{x^2+x}$.

Řešení. Označme $f(u)=\sqrt{u}$ a $u=g(x)=x^2+x$. Potom je $f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ a $g'(x)=2x+1$. A proto je podle Věty 11

$$\left(\sqrt{x^2+x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+1)\bigg|_{u=x^2+x} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

$\square$

Složenou funkci je výhodné derivovat podle pravidla vnější funkce a vnitřní funkce:

$$\Big[\underbrace{f}_{\text{vnější}}\big(\underbrace{g}_{\text{vnitřní}}(x)\big)\Big]' = \underbrace{f'\big(g(x)\big)}_{\substack{\text{derivuj vnější}\\ \text{nechej jako}\\ \text{argument vnitřní}}} \quad . \quad \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivuj}\\ \text{vnitřní}}} \ .$$

Příklad 48.

$$\left(\sqrt{x^3+x^2+x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \cdot (3x^2+2x+1),$$

$$[(x^2+x)^2]' = 2\,(x^2+x)\,.\,(2x+1) = 4x^3+6x^2+2x.$$

Všimněte si, že poslední uvedený příklad lze spočítat i přímo

$$[(x^2+x)^2]' = (x^4+2x^3+x^2)' = 4x^3+6x^2+2x,$$

nebo podle pravidla součinu

$$[(x^2+x)^2]' = [(x^2+x)\,.\,(x^2+x)]' = (2x+1)\,.\,(x^2+x)+(x^2+x)\,.\,(2x+1) = 4x^3+6x^2+2x.$$

□

Druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 se definuje jako derivace funkce $f'(x)$ v bodě x_0, tj. $f''(x) := [f'(x)]'$.

Podobně definujeme n-tou derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 jako derivace funkce $f^{(n-1)}(x)$ v bodě x_0, tj. $f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}(x)]'$.

Příklad 49.

$$\left(\sqrt{x}\right)'' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{0\,.\,\sqrt{x}-1\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{[\sqrt{x}]^2} = \frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

□

Poslední pravidlo, které budeme pro derivování potřebovat, je pravidlo pro derivaci inverzní funkce. Jak již víme, funkce f má inverzní funkci f^{-1} pouze pokud je $f(x)$ prostá (injektivní v terminologii MB101), tedy na zadaném intervalu buď stále roste nebo stále klesá (tj. je tzv. ryze monotónní). Složení funkce f a její inverze f^{-1} (v libovolném pořadí) dává identické zobrazení a tudíž jsou grafy funkce f a její inverze f^{-1} souměrné podle přímky $y = x$ (tj. podle osy 1. a 3. kvadrantu).

Jelikož budeme nyní primárně studovat vlastnosti funkce inverzní f^{-1}, označíme si tuto funkci v proměnné x, tj. inverzní funkce f^{-1} bude zadána jako předpis $y = f^{-1}(x)$ na svém definičním oboru $\mathcal{D}(f^{-1}) = J$. Neznámé vlastnosti (zejména tedy derivaci) inverzní funkce $f^{-1}(x)$ vyjádříme pomocí derivace „původní" a tudíž známé funkce f, kterou si označíme v proměnné y. Tj. „původní" funkce je dána předpisem $x = f(y)$ na svém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = I = f^{-1}(J)$, neboli $\mathcal{D}(f^{-1}) = J = f(I)$.

Příklad 50. Zajímají nás vlastnosti (např. derivace) funkce $\sqrt[3]{x}$. Tato funkce je inverzní k funkci x^3. Označíme si proto tuto inverzi v proměnné x, tj. $\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}}$, a „původní" funkci v proměnné y, tj. $\boxed{f(y) = y^3}$.

Potom budeme moct vyjádřit derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$ pomocí derivace „původní" funkce $f(y) = y^3$, tj. pomocí $f'(y) = 3y^2$. □

Věta 12 (Derivace inverzní funkce). *Je-li funkce $x = f(y)$ spojitá a ryze monotonní na intervalu J a je-li $y_0 \in J$ vnitřní bod tohoto intervalu takový, že $f(y)$ má derivaci (vlastní nebo nevlastní) $f'(y_0)$ v bodě y_0, potom má inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ derivaci $(f^{-1})'(x_0)$ v bodě $x_0 := f(y_0)$. Pro tuto derivaci platí následující:*

(i) *Je-li $f'(y_0) \neq 0$, potom je*

$$\boxed{(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x_0)\big)}}.$$

(ii) *Je-li $f'(y_0) = 0$, potom je $(f^{-1})'(x_0)$ nevlastní a přitom*

$$(f^{-1})'(x_0) = \infty, \qquad \textit{pro } f(y) \textit{ rostoucí,}$$
$$(f^{-1})'(x_0) = -\infty, \qquad \textit{pro } f(y) \textit{ klesající.}$$

Důkaz. Označme jako

$\varphi =$ (známý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $x = f(y)$ v bodě $[y_0, x_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy y,

$\psi =$ (neznámý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$, vzhledem ke kladnému směru osy x,

přičemž platí, že $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = f'(y_0)}$ je známá hodnota a my chceme určit neznámou hodnotu

$$\boxed{\operatorname{tg}\psi = (f^{-1})'(x_0)}.$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ (viz obr.), je pro $\operatorname{tg}\varphi \neq 0$

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{2}\sin\varphi}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \sin\frac{\pi}{2}\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$
$$= \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

neboť $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Je tedy

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Je-li $\operatorname{tg}\varphi = 0$ (tečna ke grafu původní funkce $x = f(y)$ je vodorovná), potom je tečna ke grafu inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ svislá, tj. $(f^{-1})'(x_0)$ je nevlastní. □

Poznámka 6. Derivaci inverzní funkce lze také odvodit z pravidla pro složenou funkci (Věta 11). Je totiž pro každé $x \in \mathcal{D}(f^{-1})$

$$x = f\big(f^{-1}(x)\big),$$

a tedy derivováním na obou stranách této rovnosti dostaneme

$$1 = \big[f\big(f^{-1}(x)\big)\big]' = f'\big(f^{-1}(x)\big) \,.\, (f^{-1})'(x), \qquad \text{tj.} \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

□

Příklad 51. Určete derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$.

Řešení. Označme si (viz Příklad 50)

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad x = f(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 3y^2.$$

Tedy podle Věty 12 je

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\,(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}.$$

Všimněte si, že $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ a výraz na pravé straně je $\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$. □

2.9. **Derivace elementárních funkcí.** V tomto odstavci odvodíme derivace všech elementárních funkcí.

Ze vztahu (19) víme, že pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$ (pro $n = 0$ derivaci funkce $x^0 \equiv 1$ můžeme v tomto vztahu interpretovat jako $0 = (1)' = (x^0)' = 0x^{-1}$, přičemž poslední uvedený výraz definujeme jako 0).

Nyní ukážeme, že stejný vztah platí pro libovolné (reálné) exponenty, nejen pro přirozená čísla.

Tvrzení 1 (Derivace mocniny). *Pro libovolný exponent $r \in \mathbb{R}$ platí, že*

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \tag{20}$$

kdykoliv mají uvedené výrazy smysl.

Důkaz.
Krok I. ($r = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). To jsme již ukázali ve vzorečku (19).

Krok II. ($r = m \in \mathbb{Z}$). Nechť m je záporné celé číslo, tj. $m = -n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Potom $x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ a tedy derivaci funkce x^m odvodíme z pravidla pro derivaci podílu (Věta 10(iv)):

$$(x^m)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0\,.\,x^n - 1\,.\,nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)\,x^{(n-1)-2n} = (-n)\,x^{-n-1} = mx^{m-1}.$$

Krok III. ($r = \frac{1}{q}$, kde $q \in \mathbb{N}$). Derivaci funkce $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ odvodíme z věty o derivaci inverzní funkce (Věta 12, podobně jako v Příkladu 51). Označme si $y = f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$ a $x = f(y) = y^q$. Protože je $q \in \mathbb{N}$, je podle Kroku I. $f'(y) = qy^{q-1}$. A tedy podle Věty 12 platí, že

$$(x^r)' = (\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q\big(\sqrt[q]{x}\big)^{q-1}} = \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Krok IV. ($r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$). Derivaci funkce $x^{\frac{p}{q}} = \big(x^{\frac{1}{q}}\big)^p$ odvodíme z věty o derivaci složené funkce (Věta 11) a z Kroku I. a III.:

$$(x^r)' = \left[\big(x^{\frac{1}{q}}\big)^p\right]' = p\,\big(x^{\frac{1}{q}}\big)^{p-1}\,.\,\frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p-1}{q}}\,.\,x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p-1+1-q}{q}} == \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Nebo lze postupovat v obráceném pořadí, tj. derivovat výraz $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ jako složenou funkci. Vyzkoušejte si tuto druhou možnost sami.

Krok V. ($r \in \mathbb{R}$). Tento poslední krok plyne např. z pravidla pro derivování exponenciální funkce, které odvodíme později (viz Důsledek 2). □

Poznámka 7. Výraz x^r obecně není definován pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Např. pro $r = \frac{1}{2}$ je tento výraz definován pouze pro $x \geq 0$. Obecně lze s jistotou říci, že rovnost (20) platí pro $x > 0$ (a libovolné $r \in \mathbb{R}$).

Navíc, pro některé exponenty může rovnost (20) platit i pro $x \leq 0$. Např. pro $r \geq 1$ platí i pro $x = 0$, či pro r celé záporné (tj. pro $r = -1, -2, -3, \dots$) rovnost (20) platí pro všechna $x < 0$ (kromě již uvedených $x > 0$). □

Příklad 52.

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, && \text{(viz Příklad 39)},\\
&\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, && \text{(viz Příklad 37)},\\
&(x^\pi)' = \pi\, x^{\pi-1}.
\end{aligned}$$

□

Tvrzení 2 (Derivace trigonometrických funkcí). *Pro trigonometrické funkce platí*

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \tag{21}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{22}$$

Důkaz. Derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$ vypočteme z definice (Definice 7 a vzorec (18)) za použití součtových vzorců:

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x)\,(\cos h) + (\cos x)\,(\sin h) - \sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ (-\sin x)\cdot \underbrace{\frac{1-\cos h}{h}}_{\to 0} + (\cos x)\cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right\} = (-\sin x)\,.\,0 + (\cos x)\,.\,1 = \cos x,\\
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x)\,(\cos h) - (\sin x)\,(\sin h) - \cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ (-\sin x)\cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} - (\cos x)\cdot \underbrace{\frac{1-\cos h}{h}}_{\to 0} \right\} = (-\sin x)\,.\,1 - (\cos x)\,.\,0 = -\sin x.
\end{aligned}$$

Derivace funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ odvodíme z pravidla pro derivaci podílu (Věta 10(iv)):

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)\,.\,(\cos x) - (\sin x)\,.\,(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\\
(\operatorname{cotg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\,.\,(\sin x) - (\cos x)\,.\,(\cos x)}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

Všimněte si také, že derivaci $\operatorname{cotg} x$ lze spočítat z pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11), protože platí

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left[(\operatorname{tg} x)^{-1}\right]' = (-1)\,(\operatorname{tg} x)^{-2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = (-1)\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

□

Dále uvedeme derivace exponenciálních a logaritmických funkcí. O čísle e více v Příkladu 16.

Tvrzení 3 (Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí). *Pro exponenciální a logaritmické funkce platí*

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \tag{23}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{24}$$

Důkaz. Derivace funkcí e^x a a^x vypočteme z definice (Definice 7) za použití základních limit (13) a (15):

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \,.\, e^h - e^x}{h} = e^x \,.\, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x \,.\, 1 = e^x,$$

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x \,.\, a^h - a^x}{h} = a^x \,.\, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{=\ln a} = a^x \,.\, \ln a.$$

Všimněte si, že derivaci funkce a^x je také možné vypočítat z derivace složené funkce pomocí

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \,.\, \ln a = a^x \ln a.$$

Derivace funkcí $\ln x$ a $\log_a x$ vypočteme z definice (Definice 7) za použití základní limity (14):

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{=1} \cdot \frac{1}{x} = 1 \,.\, \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Všimněte si, že derivaci funkce $\ln x$ lze také spočítat z derivace funkce inverzní (Věta 12), neboť pro $y = f^{-1}(x) = \ln x$ a pro $x = f(y) = e^y$ máme $f'(y) = e^y$, takže podle Věty 12 je

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

□

Důsledek 2 (Derivace mocniny). *Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ platí*

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \qquad x > 0.$$

Důkaz. Z pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11) a z derivace logaritmu plyne, že

$$(x^r)' = \left(e^{r \ln x}\right)' = e^{r \ln x} \,.\, (r \ln x)' = x^r \,.\, r \frac{1}{x} = rx^r \,.\, x^{-1} = rx^{r-1}.$$

□

`Konec 3. přednášky (5.3.2007)`

Poznámka 8. V Příkladech 23, 24, 25, 26, 27 a 28 jsme ukázali, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0,$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1,\qquad .$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)}{h}=\frac{1}{\ln a}.$$

Tyto limity ale nevyjadřují nic jiného, než derivace funkcí $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x v bodě 0 a derivace funkcí $\ln x$, $\log_a x$ v bodě 1, neboť

$$(\sin x)'\big|_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1,\qquad (\cos x)'\big|_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0,$$
$$(e^x)'\big|_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1,\qquad (\ln x)'\big|_{x=1}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1,$$
$$(a^x)'\big|_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a,\qquad (\log_a x)'\big|_{x=1}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)}{h}=\frac{1}{\ln a}.$$

□

Tvrzení 4 (Derivace cyklometrických funkcí). *Pro cyklometrické funkce platí*

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\tag{25}$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\operatorname{arccotg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.\tag{26}$$

Důkaz. Derivace všech těchto cyklometrických funkcí vypočteme z pravidla pro derivování invezrní funkce (Věta 12).

• Pro $y=f^{-1}(x)=\underline{\arcsin x}$ a pro $x=f(y)=\sin y$ máme $f'(y)=\cos y$, a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Protože ale pro libovolné $y\in\mathbb{R}$ je $(\cos y)^2+(\sin y)^2=1$ (zejména tedy pro $y=\arcsin x$), je

$$1=\big[\cos(\arcsin x)\big]^2+\big[\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\big]^2=\cos^2(\arcsin x)+x^2,$$

$$\Rightarrow\quad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

• Pro $y=f^{-1}(x)=\underline{\arccos x}$ a pro $x=f(y)=\cos y$ máme $f'(y)=-\sin y$, a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\arccos x)'=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Protože ale pro libovolné $y\in\mathbb{R}$ je $(\cos y)^2+(\sin y)^2=1$ (zejména tedy pro $y=\arccos x$), je

$$1=\big[\underbrace{\cos(\arccos x)}_{=x}\big]^2+\big[\sin(\arccos x)\big]^2=x^2+\sin^2(\arccos x),$$

$$\Rightarrow\quad \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

• Pro $y = f^{-1}(x) = \underline{\operatorname{arctg} x}$ a pro $x = f(y) = \operatorname{tg} y$ máme $f'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{f'(y)} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Protože ale pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ (zejména tedy pro $y = \operatorname{arctg} x$), je

$$1 = \big[\cos(\operatorname{arctg} x)\big]^2 + \big[\sin(\operatorname{arctg} x)\big]^2.$$

Vydělením obou stran této rovnosti výrazem $\big[\cos(\operatorname{arctg} x)\big]^2$ dostaneme

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = 1 + \left(\frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\cos(\operatorname{arctg} x)}\right)^2 = 1 + \big[\underbrace{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}_{=x}\big]^2 = 1 + x^2,$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

• Pro $y = f^{-1}(x) = \underline{\operatorname{arccotg} x}$ a pro $x = f(y) = \operatorname{cotg} y$ máme $f'(y) = -\frac{1}{\sin^2 y}$, a proto podle Věty 12 platí, že

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{f'(y)} = -\sin^2 y = -\sin^2(\operatorname{arccotg} x).$$

Protože ale pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ (zejména tedy pro $y = \operatorname{arccotg} x$), je

$$1 = \big[\cos(\operatorname{arccotg} x)\big]^2 + \big[\sin(\operatorname{arccotg} x)\big]^2.$$

Vydělením obou stran této rovnosti výrazem $\big[\sin(\operatorname{arccotg} x)\big]^2$ dostaneme

$$\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccotg} x)} = \left(\frac{\cos(\operatorname{arccotg} x)}{\sin(\operatorname{arccotg} x)}\right)^2 + 1 = \big[\underbrace{\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x)}_{=x}\big]^2 + 1 = x^2 + 1,$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\sin^2(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□

Příklad 53. Zkuste si promyslet, jak by se vypočítaly derivace funkcí typu $[f(x)]^{g(x)}$, jako např.

$$x^x, \qquad x^{\ln x}, \qquad x^{\sin x}, \qquad (\sin x)^x, \qquad \text{atd.}$$

□

2.10. Věty o střední hodnotě.

Věta 13 (Rolleova). *Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a,b]$, $f(x)$ je diferencovatelná na (a,b) a nechť $f(a)=f(b)$. Potom existuje (alespoň jeden) bod $c \in (a,b)$ s vlastností*

$$f'(c)=0 \qquad \text{(tj. tečna v bodě } x=c \text{ je vodorovná).}$$

Důkaz. Viz obr. □

Věta 14 (Lagrangeova). *Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a,b]$ a $f(x)$ je diferencovatelná na (a,b). Potom existuje (alespoň jeden) bod $c \in (a,b)$ s vlastností*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(tj. tečna v bodě } x=c \text{ je rovnoběžná s přímkou procházející body } [a,f(a)] \text{ a } [b,f(b)]\text{)}.$$

Důkaz. Viz obr. □

Věty o střední hodnotě mají celou řadu důsledků týkajících se vlastnosti funkcí. Např.:

- Které funkce mají nulovou derivaci? – Pouze konstantní funkce.
- Které funkce mají stejnou derivaci? – Právě ty funkce, které se navzájem liší o konstantu.

Důsledek 3. *Je-li $f(x)$ diferencovatelná na (a,b) a je-li $f'(x)=0$ na (a,b), potom*

$$f(x)\equiv c \quad \text{na } (a,b).$$

Důkaz. Pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, platí, že $f(x)$ je spojitá na $[x_1,x_2]$ (podle Věty 9, neboť existuje vlastní $f'(x)$) a diferencovatelná na (x_1,x_2). Podle Lagrangeovy věty (Věta 14) je pak pro nějaký bod $c \in (x_1,x_2)$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0, \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1)=f(x_2).$$

A protože byly body x_1 a x_2 vybrány libovolně v intervalu (a,b), musí být nutně $f(x)$ konstantní na intervalu (a,b). □

Důsledek 4. *Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na (a,b) a je-li $f'(x)=g'(x)$ na (a,b), potom*

$$f(x)=g(x)+c \quad \text{na } (a,b) \qquad (f(x) \text{ a } g(x) \text{ se liší o konstantu}).$$

Důkaz. Funkce $(f-g)(x)$ je diferencovatelná na (a,b) a $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ na (a,b). Podle Důsledku 3 je pak

$$f(x)-g(x)\equiv c \quad \text{na } (a,b), \qquad \text{tj.} \quad f(x)=g(x)+c \quad \text{na } (a,b).$$

□

2.11. **L'Hospitalovo pravidlo.** Některé limity typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ lze řešit pomocí tzv. l'Hospitalova pravidla. (Případně i typu $\frac{k}{\pm\infty}$, tyto limity jsou ale automaticky rovny 0.)

Věta 15 (L'Hospitalovo pravidlo). *Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť je*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \textit{typu } \frac{0}{0} \textit{ nebo } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}. \tag{27}$$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

potom existuje také limita (27) *a tyto dvě limity jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (\in \mathbb{R}^*). \tag{28}$$

Příklad 54.

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x \quad \Big| \text{ typ } 0\,.\,(-\infty) \Big| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \Big| \text{ typ } \frac{-\infty}{\infty} \Big| \stackrel{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \quad \Big| \text{ typ } 0^0 \Big| = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} \quad \stackrel{\text{spojitost } e^x}{=} \quad e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x} \stackrel{\text{(a)}}{=} e^0 = 1.$$

□

Poznámka 9. L'Hospitalovo pravidlo říká, že jestliže existuje limita podílu derivací, potom exituje také limita podílu funkcí (a tyto dvě limity jsou si rovny)! Nic víc.

(i) L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, pokud limita podílu derivací neexistuje. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \Big| \text{ typ } \frac{\text{ohr.}}{\infty} \Big| = 0,$$

ale limita podílu derivací neexistuje, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} \cos x \qquad \text{(neexistuje)}.$$

(ii) L'Hospitalovo pravidlo nelze použít na typ limity $\frac{\text{cokoliv}}{0}$! Pokud je ve jmenovateli typ 0, musí pak být i v čitateli typ 0 (aby bylo možné l'Hospitalovo pravidlo použít). Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} \quad \Big| \text{ typ } \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} \Big| = \infty,$$

ale limita podílu derivací je jiná, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{(\operatorname{arccotg} x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = -1.$$

$\square$

Poznámka 10.

(i) Limity typu $\infty - \infty$ lze převést na typ $\frac{0}{0}$ následovně:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] \quad \left|\ \text{typ } \infty-\infty\ \right| = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}} \quad \left|\ \text{typ } \frac{0}{0}\ \right|.$$

(ii) Limity typu $0 \,.\, \infty$ lze převést na typ $\frac{0}{0}$ (viz Příklad 54(a)) nebo na typ $\frac{\infty}{\infty}$ následovně:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\,.\,g(x)] \quad \left|\ \text{typ } 0\,.\,\infty\ \right| = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left|\ \text{typ } \frac{0}{0}\ \right|,$$

$$\overset{\text{nebo}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\infty}{\infty}\ \right|.$$

(iii) Limity typu 0^0, ∞^0, 1^∞ lze převést na typ $0\,.\,\infty$ přes exponenciální funkci (viz např. Příklad 54(b)):

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\,\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\,\ln f(x)} \quad \left|\ \text{typ } 0\,.\,\infty \text{ nebo } \infty\,.\,0\ \right|.$$

$\square$

2.12. **Derivace implicitně zadaných funkcí.** Pokud máme zadánu funkci $f(x)$ vzorcem $y = f(x)$, hovoříme o jejím explicitním zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice $F(x, y) = 0$, kde závislá proměnná y představuje „neznámou" funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k y, pak hovoříme o funkci zadané implicitně. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat $y'(x)$ (aniž bychom znali explicitní vzorec pro $y(x)$), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11).

Příklad 55. Rovnice $y^2 = x$ definuje dvě diferencovatelné funkce

$$y_1 = \sqrt{x}, \qquad y_2 = -\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Avšak i bez znalosti samotných funkcí y_1 a y_2 lze derivováním rovnice $y^2 = x$ spočítat, že

$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y},$$

což je jediný vzorec pro y' obsahující jak y_1 tak y_2. $\square$

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuhe výsledná derivace y' jak proměnnou x tak proměnnou y (na rozdíl od „normálního" derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná x).

Při derivování implicitně zadaných funkcí musíme brát závislou proměnnou (obvykle) y jako funkci proměnné x, tedy jakýkoliv složitější výraz s y musíme derivovat pomocí pravidla pro derivaci složené funkce (Věta 11), viz Příklad 55.

Příklad 56. Určete směrnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $P = [-3, 4]$.

Řešení. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

A proto je směrnice tečny v bodě P (=derivace v bodě P) rovna

$$y' = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

□

V Příkladech 55 a 56 bylo možné neznámou funkci y explicitně vypočítat (i když jsme to nepotřebovali) a najít tak y' původním způsobem. V následujícím příkladu ale y již vyjádřit nelze, a tudíž je implicitní derivování jediným možným způsobem, jak y' najít.

Příklad 57. Určete derivaci funkce $y = f(x)$, která je zadaná rovnicí $4y = x^3 + \cos y$.

Řešení. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(4y)' = (x^3 + \cos y)' \quad \Rightarrow \quad 4y' = 3x^2 - (\sin y)\, y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2}{4 + \sin y}.$$

□

Tímto způsobem lze počítat i derivace vyšších řádů.

Příklad 58. Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$, která je zadaná rovnicí $3x^4 - 4y^3 = 1$.

Řešení. Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(3x^4 - 4y^3)' = (1)' \quad \Rightarrow \quad 12x^3 - 12y^2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - y^2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{x^3}{y^2}}.$$

Opětovným derivováním předposlední uvedené rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(x^3 - y^2y')' = (0)' \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - (2yy' \,.\, y' + y^2 \,.\, y'') = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2y\,(y')^2 - y^2\, y'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'' = \frac{3x^2 - 2y\,(y')^2}{y^2}}.$$

Všimněte si, že pro derivaci výrazu y^2y' musíme použít pravidlo součinu, protože obě funkce y^2 a y' jsou funkce proměnné x. Ve výsledku samozřejmě ještě můžeme dosadit za y' z předchozího výpočtu, tj.

$$y'' = \frac{3x^2 - 2y\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2}{y^2} = \frac{3x^2y^3 - 2x^6}{y^5}.$$

□

2.13. **Monotonie funkce a extrémy.**

Definice 8 (Monotonie funkce). Funkce $f(x)$ je

- rostoucí na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- klesající na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- neklesající na intervalu I, pokud $f(x_1) \leq f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- nerostoucí na intervalu I, pokud $f(x_1) \geq f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

□

Věta 16 (Monotonie funkce). *Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.*

(i) *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.*

(ii) *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

(iii) *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$.*

(iv) *Funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z (Lagrengeovy) věty o střední hodnotě (Věta 14), neboť

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c),$$

a tedy výraz $f(x_2) - f(x_1)$ má stejné znaménko jako f'. □

Příklad 59. Funkce $f(x) = x + \cos x$ má derivaci $f'(x) = 1 - \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože je hodnota $\sin x \in [-1, 1]$, je $f'(x) \in [0, 2]$ a tedy je $f'(x) \geq 0$ na celém $\mathbb{R}$. Tedy podle Věty 16(i) je funkce $f(x)$ neklesající na $\mathbb{R}$. Navíc, protože rovnost $f'(x) = 0$ znamená, že $\sin x = 1$ a tato rovnost evidentně neplatí na žádném podintervalu $\mathbb{R}$, je podle Věty 16(ii) funkce $f(x)$ rostoucí na $\mathbb{R}$. □

Důsledek 5. *Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.*

(i) *Jestliže $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, potom je funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I.*

(ii) *Jestliže $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$, potom je funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I.*

Tedy pro určení intervalů monotonie funkce $f(x)$ stačí určit body, kdy $f'(x)$ mění znaménko. Zejména to jsou body, ve kterých je $\boxed{f'(x) = 0}$ nebo ve kterých $\boxed{f'(x) \text{ neexistuje}}$.

Příklad 60. Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16} = \frac{x}{(x-8)\,(x+2)}.$$

Řešení. Vypočteme derivaci:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 6x - 16}\right)' = \cdots = \frac{-x^2 - 16}{(x-8)^2\,(x+2)^2} < 0, \qquad \text{pro } x \neq -2,\ 8.$$

(Viz tabulka.) Tedy je tato funkce klesající na intervalu $(-\infty, -2)$, na intervalu $(-2, 8)$ a na intervalu $(8, \infty)$. □

Příklad 61. Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = e^{x^3 - 6x}.$$

Řešení. Vypočteme derivaci:

$$f'(x) = e^{x^3-6x} \,.\, (3x^2 - 6) = 3\, e^{x^3-6x} \,.\, (x^2 - 2), \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že $f'(x) = 0$ pouze pro $x = \pm\sqrt{2}$. Na každém z intervalů $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$ určíme znaménko derivace např. výběrem nějakého bodu z tohoto intervalu, protože víme, že se znaménko $f'(x)$ v těchto intervalech již nemění (viz tabulka). Tedy

$f(x)$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2}]$ a na intervalu $[\sqrt{2}, \infty)$,
$f(x)$ je klesající na intervalu $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

□

Definice 9 (Lokální extrémy). Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- lokální maximum, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- lokální minimum, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- ostré lokální maximum, pokud $f(x) < f(x_0)$ pro všechna x z nějakého ryzího okolí bodu x_0,
- ostré lokální minimum, pokud $f(x) > f(x_0)$ pro všechna x z nějakého ryzího okolí bodu x_0.

□

Následující věta říká, že tečna v bodech lokálních extrémů (pokud tedy existuje vlastní derivace v takových bodech) musí nutně být vodorovná.

Věta 17. *Existuje-li vlastní derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0, kde má funkce $f(x)$ lokální extrém, potom je nutně* $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají stacionární body funkce $f(x)$.

Opačné tvrzení k Větě 17 neplatí, tj. z $f'(x_0) = 0$ neplyne extrém v bodě x_0. Nejjednodušším příkladem je funkce $f(x) = x^3$, která v počátku nemá extrém, ale je $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$ (tj. tečna v bodě $x_0 = 0$ je vodorovná).

Důsledek 6. *Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.*

Zda v daném stacionárním bodě x_0 nebo v bodě, kde $f'(x_0)$ neexistuje, je nebo není lokální extré, můžeme určit z chování znaménka $f'(x)$ v okolí bodu x_0.

Věta 18 (Lokální extrémy a derivace). *Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0.*

(i) *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*

- *je-li změna $f'(x)$ z $\ominus$ do $\oplus$, potom je v bodě x_0 lokální minimum,*
- *je-li změna $f'(x)$ z $\oplus$ do $\ominus$, potom je v bodě x_0 lokální maximum.*

(ii) *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 stejná znaménka, potom není v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*

- *má-li $f'(x)$ v okolí bodu x_0 kladné znaménko, potom je $f(x)$ v bodě x_0 rostoucí,*
- *má-li $f'(x)$ v okolí bodu x_0 záporné znaménko, potom je $f(x)$ v bodě x_0 klesající.*

Příklad 62. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Řešení. Protože

$$\begin{array}{lllll} x \geq 0: & f(x) = x - 1 - \sqrt{x} & \Rightarrow & f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 & \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}, \\ x < 0: & f(x) = x - 1 - \sqrt{-x} & \Rightarrow & f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = 0 & \text{žádné řešení pro } x < 0. \end{array}$$

Tedy kandidáti na lokální extrémy jsou: stacionární bod $x = \frac{1}{4}$ a bod, kde neexistuje $f'(x)$, tj. $x = 0$.

Volbou např. $x = -1$, $x = \frac{1}{9}$ a $x = 1$ určíme znaménko $f'(x)$ v každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{4})$ a $(\frac{1}{4}, \infty)$ (viz tabulka). Tedy je

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ostré lok. max. v } x = 0, \\ \text{ostré lok. min. v } x = \frac{1}{4}. \end{array}}$$

□

Věta 19 (Lokální extrémy a druhá derivace). *Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(x_0) = 0$, a nechť existuje $f''(x_0)$.*

(i) *Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

(ii) *Je-li $f''(x_0) < 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Důkaz. (i) $f''(x_0) > 0$ a $f'(x_0) = 0$ znamená, že $f'(x)$ roste v bodě x_0 z $\ominus$ do $\oplus$ hodnot, tedy funkce $f(x)$ samotná klesá a pak roste. Tedy je v bodě x_0 ostré lokální minimum.

(ii) $f''(x_0) < 0$ a $f'(x_0) = 0$ znamená, že $f'(x)$ klesá v bodě x_0 z $\oplus$ do $\ominus$ hodnot, tedy funkce $f(x)$ samotná roste a pak klesá. Tedy je v bodě x_0 ostré lokální maximum. $\square$

Příklad 63. Stejně jako v Příkladu 62 je

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\bigg|_{x=\frac{1}{4}} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ostré lok. min. v } x_0 = \frac{1}{4}.$$

$\square$

Poznámka 11. Obecněji, je-li

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

potom

- pro k sudé je ostrý lokální extrém v bodě x_0, přičemž
  - pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ je v bodě x_0 ostré lokální minimum,
  - pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ je v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- pro k liché není lokální extrém v bodě x_0, přičemž
  - pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ funkce $f(x)$ roste v bodě x_0,
  - pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ funkce $f(x)$ klesá v bodě x_0.

Všechny tyto případy si můžete lehce ilustrovat na mocninných funkcích x^2, x^3, x^4, x^5, atd. v bodě $x_0 = 0$. $\square$

Definice 10 (Globální extrémy). Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- globální maximum na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$,
- globální minimum na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$.

$\square$

Poznámka 12.

(i) Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.

(ii) Globální max/min nemusí být jediné. Např. funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má globální max 1 v bodech $x = -1$ a $x = 1$, kdežto globální min 0 v bodě $x = 0$.

(iii) Globální max/min nemusí ani existovat (viz Poznámka 3).

(iv) Weierstrassova věta (Věta 6) zaručuje existenci globálního max/min – za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

(v) Pokud víme, že globální extrémy exitují, potom musí tyto globální extrémy být

$\boxed{\text{ve } \underline{\text{stacionárních bodech}} \text{ nebo v bodech, kde neexistuje } f'(x) \text{, nebo v } \underline{\text{krajních bodech}}}$
daného intervalu. Nemusíme již pak určovat, jestli jsou ve stacionárních bodech lokální extrémy či nikoliv.

□

Poznámka 13. Z Poznámky 12(v) plyne postup pro nalezení globálních extrémů spojité funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ (z Weierstrassovy věty víme, že globální max/min existuje):

- Najdeme stacionární body funkce $f(x)$ a body, kde neexistuje $f'(x)$.
- V těchto bodech a v krajních bodech intervalu určíme funkční hodnoty.
- Vybereme z nich max a min hodnotu.

□

Příklad 64. Určete globální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

Řešení. Protože je $f(x)$ spojitá na intervalu $[-1, 1]$, globální extrémy v tomto intervalu existují. Z Příkladu 62 víme, že $x = \frac{1}{4}$ je jediný stacionární bod a $x = 0$ je bod, kde neexistuje $f'(x)$, v intervalu $[-1, 1]$. Máme tedy

stacionární body:	$x = \frac{1}{4}$,	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}$,	
$\nexists\ f'(x)$	$x = 0$,	$f(0) = -1$,	$\leftarrow$ max
krajní body:	$x = -1$,	$f(-1) = -1 - 1 - 1 = -3$,	$\leftarrow$ min
	$x = 1$,	$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$.	$\leftarrow$ max

Tedy je

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{globální min } -3 \text{ v bodě } x = -1, \\ \text{globální max } -1 \text{ v bodech } x = 0,\ x = 1. \end{array}}$$

□

2.14. **Konvexnost, konkávnost, inflexe.** Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) „zatáčí“. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro deferencovatelné funkce.

Definice 11 (Konvexnost, konkávnost). Nechť má funkce $f(x)$ vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkce $f(x)$ se nazývá

- konvexní na intervalu I, pokud je $f'(x)$ neklesající na I,
- konkávní na intervalu I, pokud je $f'(x)$ nerostoucí na I.

□

Poznámka 14. To, že funkce $f'(x)$ je neklesající na intervalu I (tj. $f(x)$ je konvexní), znamená, že tečny mají „neklesající směrnici“, tj. (viz obr.)

graf funkce $f(x)$ „zatáčí doleva“ a tečny leží pod grafem.

To, že funkce $f'(x)$ je nerostoucí na intervalu I (tj. $f(x)$ je konkávní), znamená, že tečny mají „nerostoucí směrnici“, tj. (viz obr.)

graf funkce $f(x)$ „zatáčí doprava“ a tečny leží nad grafem.

□

Příklad 65.

(a) Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$ (viz obr.).

(b) Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$ (viz obr.).

(c) Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$ (viz obr.).

(d) Funkce $f(x) = ax + b$ má derivaci $f'(x) = a$, což je funkce konstantní (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je $ax + b$ konvexní na $\mathbb{R}$. Současně je konstantní funkce $f'(x) = a$ nerostoucí na $\mathbb{R}$, a proto je $ax + b$ také konkávní na $\mathbb{R}$.

□

Věta 20 (Konvexnost a konkávnost a druhá derivace). *Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ je otevřený interval a nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci $f''(x)$ na I.*

(i) *Je-li $f''(x) > 0$ na I, potom je $f(x)$ konvexní na intervalu I.*

(ii) *Je-li $f''(x) < 0$ na I, potom je $f(x)$ konkávní na intervalu I.*

Důkaz. (i) Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, potom je podle Důsledku 5(i) (který aplikujeme na funkci $f'(x)$) funkce $f'(x)$ rostoucí na intervalu I. Tedy je podle Definice 11 funkce $f(x)$ konvexní na intervalu I.

(ii) Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu I, potom je podle Důsledku 5(ii) (který aplikujeme na funkci $f'(x)$) funkce $f'(x)$ klesající na intervalu I. Tedy je podle Definice 11 funkce $f(x)$ konkávní na I. □

Tam, kde se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, se nacházejí tzv. inflexní body funkce.

Definice 12 (Inflexní bod). Nechť má funkce $f(x)$ vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x_0)$. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní, potom navíc předpokládejme, že je $f(x)$ spojitá v bodě x_0. Bod x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, pokud v nějakém levém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konkávní, nebo naopak (viz obr.) □

Věta 21 (Vlastnosti inflexních bodů).

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace $f''(x_0) = 0$ v inflexním bodě x_0, potom je $f''(x_0) = 0$.*

(ii) *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f''(x)$ mění znaménko v bodě x_0, potom je x_0 inflexní bod.*

(iii) *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom je x_0 inflexní bod.*

Zejména část (ii) v předchozí větě ukazuje, jak inflexní body najít. Současně ze změny znaménka $f''(x)$ (tedy jestli se jedná o změnu z $\ominus$ do $\oplus$ nebo o změnu z $\oplus$ do $\ominus$) poznáme, kterým směrem graf funkce $f(x)$ v bodě x_0 „zatáčí“.

Příklad 66. Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Řešení.

- $f'(x) = 1 + \cos x = 0$ implikuje, že $\cos x = -1$, tedy $x = \pi, 3\pi$ jsou stacionární body (v intervalu $[0, 4\pi]$). Body, kde neexistuje $f'(x)$ nejsou. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f'(x)$ v těchto intervalech (viz tabulka). Tedy

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je rostoucí na } [0, 4\pi], \\ f(x) \text{ nemá lokální extrémy.} \end{array}}$$

- $f''(x) = -\sin x = 0$ implikuje, že $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ jsou kandidáti na inflexní body. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f''(x)$ v těchto intervalech (viz tabulka). Tedy

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je konvexní na } [\pi, 2\pi] \text{ a na } [3\pi, 4\pi], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [0, \pi] \text{ a na } [2\pi, 3\pi], \\ f(x) \text{ má inflexi v bodech } x = \pi, 2\pi, 3\pi. \end{array}}$$

- A protože můžeme jednoduše vypočítat funkční hodnoty a hodnoty derivace (pro sklon tečny) ve zmiňovaných stacionárních, inflexních a krajních bodech,

$$\begin{array}{lllll} f(0) = 0, & f(\pi) = \pi, & f(2\pi) = 2\pi, & f(3\pi) = 3\pi, & f(4\pi) = 4\pi, \\ f'_+(0) = 2, & f'(\pi) = 0, & f'(2\pi) = 2, & f'(3\pi) = 0, & f'_-(4\pi) = 2, \end{array}$$

můžeme také načrtnout graf této funkce na intervalu $[0, 4\pi]$ (viz obr.).

□

2.15. **Asymptoty.** Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice 13 (Asymptoty funkce).

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

- Přímka $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ je asymptotou se směrnicí v ∞, pokud

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

případně je asymptotou se směrnicí v $-\infty$, pokud

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

□

Příklad 67.

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}\ \left|\ \text{typ}\ \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

□

Poznámka 15. Je zřejmé, že asymptoty bez směrnice mohou být pouze v bodech nespojitosti funkce $f(x)$. Viz např. Příklad 67(a). Samozřejmě ne každý bod nespojitosti zadává asymptotu, viz např. Příklad 67(b) a bod $x = 0$. □

Věta 22 (Asymptoty se směrnicí). *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f(x)$ v ∞* $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]. \tag{29}$$

Podobně, přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f(x)$ v $-\infty$ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]. \tag{30}$$

Důkaz. Býti asymptotou v ∞ znamená, že

$$f(x) \approx ax + b \qquad \text{pro } x \to \infty. \tag{31}$$

Tedy pokud obě strany podělíme výrazem x, dostaneme, že

$$\frac{f(x)}{x} \approx a + \frac{b}{x} \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

A protože výraz $\frac{b}{x} \to 0$ pro $x \to \infty$, dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu a.

Dále, známe-li koufiient a, potom z vzorce (31) plyne, že

$$f(x) - ax \approx b \qquad \text{pro } x \to \infty,$$

tj. dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu b.

Podobně to platí pro $x \to -\infty$. □

Poznámka 16. protože se může snadno stát, že limity v (29) a (30) se např. pro koeficient a nebo pro koeficient b liší, používáme ve výpočtu těchto koeficientů značení

$$\boxed{a_+,\, b_+}\ \text{pro limity v } \infty \qquad \text{a} \qquad \boxed{a_-,\, b_-}\ \text{pro limity v } -\infty.$$

Tedy

$$a_+ = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b_+ = \lim_{x\to\infty}[f(x) - a_+ \,.\, x], \tag{32}$$

$$a_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b_- = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - a_- \,.\, x]. \tag{33}$$

□

`Konec 4. přednášky (12.3.2007)`

Samozřejmě, pokud alespoň jedna z limit definujících koeficienty a, b je nevlastní nebo neexistuje, tak potom daná funkce asymptotu v příslušném ∞ nebo $-\infty$ nemá.

Příklad 68. Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení.

- Asymptoty bez směrnice: Protože je funkce $f(x)$ spojitá na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-2, \infty)$, asymptota bez směrnice může být teoreticky pouze v bodě $x = -2$ (viz Poznámka 15). Spočteme proto jednostranné limity v tomto bodě:

  $$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} \left| \text{typ } \frac{-64}{0^+} \right| = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} \left| \text{typ } \frac{-64}{0^+} \right| = -\infty.$$

  Tedy

  $$\boxed{x = -2 \text{ je asymptota bez směrnice}}.$$

- Asymptoty se směrnicí:

  $$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^3}{x\,(x+2)^2} = \cdots = 1,$$

  $$b_+ = \lim_{x\to\infty} [f(x) - a_+ \,.\, x] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - \frac{x\,.\,(x+2)^2}{(x+2)^2} \right)$$

  $$= \lim_{x\to\infty} \frac{-10x^2 + 8x - 8}{(x+2)^2} = -10.$$

  Tedy

  $$\boxed{y = x - 10 \text{ je asymptota v } \infty}.$$

  Výpočty pro a_- a b_- jsou naprosto stejné:

  $$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-2)^3}{x\,(x+2)^2} = \cdots = 1,$$

  $$b_- = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - a_- \,.\, x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} - \frac{x\,.\,(x+2)^2}{(x+2)^2} \right)$$

  $$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-10x^2 + 8x - 8}{(x+2)^2} = -10.$$

  Tedy

  $$\boxed{y = x - 10 \text{ je asymptota v } -\infty}.$$

(Viz obr.) □

2.16. **Celkový průběh funkce.**

Příklad 69. Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}, \qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Řešení. Určíme (viz demonstrativní cvičení)

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$), lokální extrémy (pokud použijeme Větu 18 či Důsledek 5),
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy (pokud použijeme Větu 19),
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných“ bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),
- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce $f(x)$.

□

Příklad 70. Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení.

- Definiční obor je $\boxed{\mathcal{D}(f) = (0, \infty)}$.
- První derivace
$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} = 0,$$
tedy $x = 1$ je jediný stacionární bod. Protože $f'(x) < 0$ na intervalu $(0, 1)$ a $f'(x) > 0$ na intervalu $(1, \infty)$ (viz tabulka),
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je klesající na } (0,1], \\ f(x) \text{ je rostoucí na } [1,\infty), \\ f(x) \text{ má lokální min v bodě } x = 1. \end{array}}$$
[Vzhledem k okolnostem je zřejmě v bodě $x = 1$ globální minimum funkce $f(x)$ na intervalu $(0, \infty)$.]

- Druhá derivace

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right)' = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} = 0,$$

tedy $x = 2$ je jediný kandidát na inflexní bod. Protože $f''(x) > 0$ na intervalu $(0, 2)$ a $f''(x) < 0$ na intervalu $(2, \infty)$ (viz tabulka),

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ je konvexní na } (0,2], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [2,\infty), \\ f(x) \text{ má inflexi v bodě } x = 2. \end{array}}$$

- Asymptoty bez směrnice:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) \quad \left| \text{ typ } \infty - \infty \right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} \quad \left| \text{ typ } \frac{1}{0^+} \right| = \infty,$$

protože podle Příkladu 54(a) je $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. Tedy

$$\boxed{x = 0 \text{ je asymptota bez směrnice}}.$$

Asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln x}{x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}_{=0} + \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \quad \left| \text{ typ } \frac{\infty}{\infty} \right|$$

$$\overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) \quad \left| \text{ typ } 0 + \infty \right| = \infty.$$

Tedy

$$\boxed{\text{Funkce } f(x) \text{ nemá asymptotu v } \infty}.$$

- Hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných“ bodech:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1.19, \quad f'(2) = \frac{1}{4}.$$

- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce $f(x)$:

<graf_prubeh_funkce.pdf>

□

2.17. **Optimalizace.** V tomto odstavci uvidíme, jak využít znalostí o průběhu funkce či globálních extrémů funkce pro aplikace v „běžném životě“.

Příklad 71 (Papírová krabice). Z kartonu tvaru čtverce o straně délky 54 cm vyřízněte v každém rohu stejný čtverec tak, abyste mohli sestrojit krabici (bez víka) s co největším objemem (viz obr.).

Řešení. Označme jako x (v cm) délku strany čtverců, které musíme vyříznout. Potom má zbývající podstava rozměry $54 - 2x$ cm $\times$ $54 - 2x$ cm, přičemž výška krabice bude právě x cm.

Pro objem krabice dostaneme proto vztah

$$V = V(x) = (54 - 2x)^2\, x = (2916 - 216x + 4x^2)\, x = \boxed{4\,(729x - 54x^2 + x^3)}\,.$$

Délka strany vyřízlých čtverců může být nejvýše $54/2 = 27$ cm, a proto musíme najít maximum funkce $V(x)$ na intervalu $[0, 27]$.

Protože je fukce $V(x)$ spojitá na intervalu $[0, 27]$, její maximum existuje (Weiersrtassova věta – Věta 6). Podle Poznámky 13 musíme najít stacionární body:

$$V'(x) = 4\,(729 - 108x + 3x^2) = 12\,(243 - 36x + x^2) = 12\,(27 - x)\,(9 - x) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 27, \qquad x_2 = 9.$$

Body, kde $V'(x)$ neexistuje, nejsou.

Body $x_1 = 27$ a $x_2 = 9$ jsou tedy stacionárními body funkce $V(x)$ v intervalu $[0, 27]$, přičemž bod $x_1 = 27$ je současně krajním bodem tohoto intervalu. Hodnoty funkce $V(x)$ v těchto bodech jsou

stacionární body:	$x = 27,$	$V(27) = (54 - 54)^2\, 27 = 0,$	
	$x = 9,$	$V(9) = (54 - 18)^2\, 9 = 11664,$	$\longleftarrow$ max
krajní body:	$x = 0,$	$V(0) = 0,$	
	$x = 27,$	$V(27) = 0.$	

Tedy maximální objem je 11664 cm^3 (téměř 12 litrů) pro krabici o rozměrech 36 cm $\times$ 36 cm $\times$ 9 cm, tj. v každém rohu musíme vyříznout čtverec $\boxed{\text{o straně 9 cm}}$.

Všimněte si, že maximum můžeme také ověřit testem s první derivací (např. Důsledek 5): pro $x \in [0, 9)$ je $V'(x) > 0$, tedy $V(x)$ je rostoucí na intervalu $[0, 9]$, zatímco pro $x \in (9, 27)$ je $V'(x) < 0$ a tedy $V(x)$ je klesající na intervalu $[9, 27]$.

Všimněte si také, že funkce $V(x)$ je konkávní na intervalu $[0, 18]$, konvexní na intervalu $[18, 27]$ a v bodě $x = 18$ má inflexní bod. □

Příklad 72 (Výroba plechovky). Určete rozměry litrové plechovky tak, aby spotřeba materiálu na její výrobu byla co nejmenší.

Řešení. Označme si jako h (v cm) výšku plechovky a jako r (v cm) poloměr jejího dna (či víčka). Potom je na výrobu takové plechovky potřeba

$$S = S(h, r) = \underbrace{2\,\pi r^2}_{\text{dno + víčko}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{stěna}} \qquad \text{cm}^2 \text{ materiálu.}$$

Protože ale musí mít plechovka objem 1 litr $= 1000$ cm^3, musí platit

$$V = \pi r^2 h = 1000 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1000}{\pi r^2},$$

a tedy je

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\,\frac{1000}{\pi r^2} = \boxed{2\pi r^2 + \frac{2000}{r}}, \qquad \text{pro } r > 0.$$

Hledáme tedy minimum funkce $S(r)$ pro $r \in (0, \infty)$. Všimněte si, že daný interval není uzavřený ani ohraničený, a proto pro existenci extrému nelze použít Weierstrassovu větu (Věta 6).

Určeme nejdříve stacionární body:

$$S'(r) = (2\pi r^2 + 2000\,r^{-1})' = 4\pi r - 2000\,r^{-2} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \qquad \pi r^3 = 500, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r = r_0 := \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}} \approx 5.42.$$

Dále, protože je

$$S''(x) = (4\pi r - 2000\,r^{-2})' = 4\pi + 4000\,r^{-3} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \qquad \text{pro } r > 0,$$

je funkce $S(r)$ konvexní na celém intervalu $(0, \infty)$. A proto je bod r_0 globální minimum.

Odpovídající výška plechovky je pak

$$h_0 = \frac{1000}{\pi r_0^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2\,\frac{\frac{500}{\pi}}{\sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = \boxed{2\,r_0} \approx 10.84.$$

Spotřeba materiálu je tedy minimální, pokud

$\boxed{\text{výška plechovky je rovna průměru podstavy}}$.

□

2.18. **Diferenciál funkce.** Diferenciál funkce je pojem, který se pro funkce jedné proměnné využívá pouze pro potřeby integrování (viz následující kapitola) nebo pro přibližné výpočty. Pro funkce více proměnných má mnohem větší význam (viz MB103).

Definice 14 (**Diferenciál**)**.** Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce $y = f(x)$. Potom definujeme

- diferenciál dx (diferenciál nezávislé proměnné) jako $\boxed{dx = x - x_0}$ (pro x blízko x_0),
- diferenciál dy (diferenciál závislé proměnné) jako $\boxed{dy = f'(x_0)\,.\,dx}$.

Alternativní značení pro dy je df, případně $df(x_0)$ pokud chceme zdůraznit, že se jedná o diferenciál v bodě x_0. □

Uvědomte si, že pokud je x napravo od x_0, je $dx = x - x_0 > 0$, pokud je ale x nalevo od x_0, je $dx = x - x_0 < 0$.

Příklad 73.

$$y = \sin x, \qquad dy = (\sin x)'\,.\,dx = (\cos x)\,dx,$$
$$y = -x + x\,\ln x, \qquad dy = (-x + x\,\ln x)'\,.\,dx = (\ln x)\,dx.$$

□

Co to vlastně ten diferenciál je (nepleťte si s diferenciálem v automobilu)?

Pokud se podíváme na rovnici tečny v bodě x_0 (viz Poznámka 5), potom máme

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0), \\ y - f(x_0) &= \underbrace{f'(x_0)\,dx}_{dy} = df(x_0). \end{aligned} \tag{34}$$

Vidíme tedy, že diferenciál dy je změna funkčních hodnot na tečně (viz obr.). A protože hodnoty na tečně aproximují funkční hodnoty $f(x)$ pro x blízko bodu x_0, plyne z (34) vzoreček pro přibližné výpočty:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)}, \qquad \text{tj.} \qquad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{35}$$

(Jedná se vlastně o rovnici tečny trošku zapsanou jiným způsobem). Tedy hodnoty funkce $f(x)$ pro x „blízko“ bodu x_0 se přibližně rovnají hodnotám na tečně v bodě x_0, přičemž pro tento výpočet musíme znát hodnotu funkce $f(x_0)$ a derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0.

Diferenciál je tedy přibližná změna funkčních hodnot pro x blízko x_0.

Příklad 74. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Řešení. Protože známe $\sqrt{81} = 9$, položíme $x_0 = 81$ a $x = 85$, tj. $dx = x - x_0 = 4$. Tedy pro $f(x) = \sqrt{x}$ potom je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a tedy $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$. Ze vzorce (35) potom plyne, že

$$\begin{aligned} f(85) &\approx f(81) + df(81) = f(81) + f'(81)\,dx, \qquad \text{tj.} \\ \sqrt{85} &\approx 9 + \frac{1}{18} \cdot 4 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} = 9.2222\ldots. \end{aligned}$$

(Pro srovnání je přesná hodnota $\sqrt{85} = 9.2195\ldots$.) □

Příklad 75. Poloměr kruhu se mění z 20 m na 20,1 m. Odhadněte nárust jeho plochy.

Řešení. Obsah kruhu je $P = P(r) = \pi r^2$. Položíme $r_0 = 20$, $r = 20.1$, a pak $dr = r - r_0 = 20.1 - 20 = 0.1$. Protože je $P(r_0) = P(20) = 400\pi$ a $P'(r_0) = P'(20) = 2\pi r\big|_{r=20} = 40\pi$, je podle vzorce (35)

$$P(r) \approx P(r_0) + P'(r_0)\,dr = 400\pi + 40\pi\,.\,(0.1) = 404\pi. \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{dP(r_0) = 4\pi} \approx P(r) - P(r_0).$$

Odhad nárůstu plochy je asi $4\pi\,\mathrm{m}^2$.

Přibližný procentuální nárust plochy (vzhledem k původní ploše) je pak

$$\frac{dP(r_0)}{P(r_0)} = \frac{4\pi}{400\pi} = \frac{1}{100} = 1\%.$$

Tedy plocha vzroste přibližně o 1%. □

2.19. **Taylorův polynom.** Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí lineárního polynomu slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o Taylorově polynomu.

Definice 15 (Taylorův polynom). Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu n. Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 je polynom

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Alternativně zapisujeme Taylorův polynom pomocí sumy

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k,$$

přičemž pro $k = 0$ klademe $0! := 1$ a $f^{(0)}(x) := f(x)$. □

Poznámka 17.

(i) Taylorův polynom stupně $n = 0$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_0(x) = f(x_0),$$

tedy jedná se o konstantní funkci.

(ii) Taylorův polynom stupně $n = 1$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Vidíme tedy, že tento polynom je přesně rovnice tečny (viz Poznámka 5) nebo také vyjadřuje aproximaxi funkce $f(x)$ pomocí diferenciálu (viz vzorec (35)).

□

Příklad 76. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = \sin x}.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \sin x$ máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, & f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x,\\ f^{(4)}(x) &= \sin x = f(x), & f^{(5)}(x) &= \cos x = f'(x), & f^{(6)}(x) &= -\sin x = f''(x). \end{aligned}$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f'(0) &= 1, & f''(0) &= 0, & f'''(x) &= -1,\\ f^{(4)}(0) &= 0 = f(0), & f^{(5)}(0) &= 1 = f'(0), & f^{(6)}(0) &= 0 = f''(0). \end{aligned}$$

Všimněte si, že všechny derivace sudého řádu jsou v bodě $x_0 = 0$ rovny 0, a tedy sudé mocniny x se ve výsledných polynomech nebudou vyskytovat.

Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jsou tedy

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= f(0) = 0,\\
T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)\, x = x,\\
T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 = x,\\
T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\, x^3 = x - \frac{1}{6}\, x^3,\\
T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\, x^4 = x - \frac{1}{6}\, x^3,\\
T_5(x) &= T_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\, x^5 = x - \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{120}\, x^5,\\
T_6(x) &= T_5(x) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}\, x^6 = x - \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{120}\, x^5.
\end{aligned}$$

Aproximace funkce $\sin x$ pomocí těchto polynomů je zobrazena v přiloženém souboru

<taylоruv_polynom_sinus.pdf>

□

Příklad 77. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = \cos x}\,.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \cos x$ máme

$$\begin{aligned}
&f'(x) = -\sin x, && f''(x) = -\cos x, && f'''(x) = \sin x,\\
&f^{(4)}(x) = \cos x = f(x), && f^{(5)}(x) = -\sin x = f'(x), && f^{(6)}(x) = -\cos x = f''(x).
\end{aligned}$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1, && f'(0) = 0, && f''(0) = -1, && f'''(x) = 0,\\
&f^{(4)}(0) = 1 = f(0), && f^{(5)}(0) = 0 = f'(0), && f^{(6)}(0) = -1 = f''(0).
\end{aligned}$$

Všimněte si, že všechny derivace lichého řádu jsou v bodě $x_0 = 0$ rovny 0, a tedy liché mocniny x se ve výsledných polynomech nebudou vyskytovat.

Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jsou tedy

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= f(0) = 1,\\
T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)\,x = 1,\\
T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2,\\
T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2,\\
T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4,\\
T_5(x) &= T_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4,\\
T_6(x) &= T_5(x) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}\,x^6 = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 - \frac{1}{720}\,x^6.
\end{aligned}
$$

Aproximace funkce $\cos x$ pomocí těchto polynomů je zobrazena v přiloženém souboru

<`taylоruv_polynom_kosinus.pdf`>

□

Příklad 78. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = e^x}\,.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = e^x$ máme

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = e^x.$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou všechny rovny $e^0 = 1$.

Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4$ jsou tedy

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= f(0) = 1,\\
T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)\,x = 1 + x,\\
T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2,\\
T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3,\\
T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4.
\end{aligned}
$$

Aproximace funkce e^x pomocí těchto polynomů je zobrazena v přiloženém souboru

<`tayloruv_polynom_exp.pdf`>

□

Příklad 79. Určete Taylorův polynom stupně $n = 0, 1, 2, 3, 4$ se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci

$$\boxed{f(x) = \ln(1 + x)}.$$

Řešení. Pro funkci $f(x) = \ln(1 + x)$ máme

$$f'(x) = (1 + x)^{-1} = \frac{1}{1 + x}, \qquad f''(x) = (-1)\,(1 + x)^{-2} = \frac{-1}{(1 + x)^2},$$
$$f'''(x) = (-1)\,(-2)\,(1 + x)^{-3} = \frac{2}{(1 + x)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = 2\,(-3)\,(1 + x)^{-4} = \frac{-6}{(1 + x)^4}.$$

Hodnoty funkce a derivací v bodě $x_0 = 0$ tedy jsou

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

Příslušné Taylorovy polynomy $T_n(x)$ stupňů $n = 0, 1, 2, 3, 4$ jsou tedy

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= f(0) = 0,\\
T_1(x) &= T_0(x) + f'(0)\,x = x,\\
T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = x - \frac{1}{2}\,x^2,\\
T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3,\\
T_4(x) &= T_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4.
\end{aligned}$$

Aproximace funkce e^x pomocí těchto polynomů je zobrazena v přiloženém souboru

<taylorуv_polynom_ln.pdf>

□

Vidíme tedy, že funkce $f(x)$ je aproximována Taylorovým polynomem. Můžeme se ovšem ptát, jak vypadá přesné vyjádření funkce $f(x)$ pomocí Taylorova polynomu. Potom nutně musíme zahrnout do výpočtu výraz pro chybu aproximace – a dostaneme tzv. Taylorův rozvoj se zbytkem.

Věta 23 (Taylorův rozvoj se zbytkem). *Nechť $f(x)$ má spojité derivace $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť existuje vlastní derivace $f^{(n+1)}(x)$ na otevřeném intervalu (a, b). Potom pro každý bod $x \in (a, b)$ existuje bod $c \in (a, x)$ tak, že platí rovnost*

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + R_n(x)}, \qquad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}\,(x - a)^{n+1}, \tag{36}$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

Důkaz. Toto důležité tvrzení je důsledkem Rolleovy věty o střední hodnotě (Věta 13). Podrobnosti jsou ve sktiptech prof. Slováka. □

Výraz $R_n(x)$ ve vzorci (36) se nazývá Taylorův zbytek (se středem v bodě x_0) a vyjadřuje chybu aproximace Taylorovým polynomem $T_n(x)$. O odhadu velikosti $R_n(x)$ (a tudíž velikosti chyby aproximace Taylorovým polynomem) je celá matematická teorie.

Příklad 80. Pro funkci $f(x) = e^x$ a Taylorův polynom $T_n(x)$ se středem v bodě 0 (viz Příklad 78) je zřejmě pro libovolné $x \in \mathbb{R}$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \qquad \text{kde } c \text{ leží mezi } 0 \text{ a } x.$$

Všimněte si, že pro $x > 0$ je vždy $e^c < e^x$ (neboť $c \in (0, x)$ a exponenciální funkce je rostoucí), a tedy platí odhad

$$R_n(x) \leq \frac{e^x}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \qquad x > 0,$$

zatímco pro $x < 0$ je vždy $e^c < 1$ (neboť v tomto případě je $c \in (x, 0)$), a tedy platí odhad

$$R_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}, \qquad x < 0.$$

V obou dvou případech (jak pro $x > 0$ tak pro $x < 0$) ale vidíme, že pro pevně zvolené x se bude s rostoucím n výraz $R_n(x)$ blížit k nule, protože lze ukázat, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

□

Poznámka 18. S rostoucím n se stupeň Taylorova polynomu zvyšuje, až se pro $n \to \infty$ dostáváme v polynomu $T_n(x)$ k součtu nekonečně mnoha členů – tzv. nekonečné řadě. Více o tomto tématu probereme v odstavci 4.5. □

Příklad 81. Odhadněte chybu v bodě $x = \frac{\pi}{4}$ Taylorova polynomu stupně $n = 6$ funkce $f(x) = \cos x$ se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Z Příkladu 77 víme, že příslušný Taylorův polynom je

$$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{24}\, x^4 - \frac{1}{720}\, x^6,$$

přičemž $f^{(6)}(x) = -\cos x$.

Pro zbytek $R_6(x)$ pak podle vzorce (36) platí, že

$$R_6(x) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!}\, x^7 = \frac{\sin c}{7!}\, x^7,$$

kde číslo c leží mezi 0 a x. A protože pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí $|\sin c| \leq 1$, potom pro $x = \frac{\pi}{4}$ máme

$$\left| R_6\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \approx 0.0000366.$$

□

3. Integrální počet

Integrální počet se zabývá studiem funkcí a jejich aplikací, pokud známe hodnotu derivace.

3.1. **Primitivní funkce.** Základní otázkou tohoto odtavce je následující: Známe-li funkci $f(x)$, jak lze najít (pokud vůbec existuje) funkci $F(x)$ tak, že $F'(x) = f(x)$?

Příklad 82. Pro jakou funkci $F(x)$ platí, že $\boxed{F'(x) = f(x)}$, kde

$$\text{(a)} \quad f(x) = x^2, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \cos x.$$

Řešení.

(a)

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \frac{x^3}{3} + 1, \quad \frac{x^3}{3} - \pi, \quad \text{neboť} \quad F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2 = f(x),$$

či nejobecněji

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

(b)

$$F(x) = \sin x, \quad \sin x + 1, \quad \sin x - \pi, \quad \text{neboť} \quad F'(x) = \cos x + 0 = \cos x = f(x),$$

či nejobecněji

$$F(x) = \sin x + C, \quad \text{kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

□

Definice 16 (Primitivní funkce). Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je <u>primitivní</u> k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I. \tag{37}$$

□

Příklad 83. Z pravidel pro derivování elementárních funkcí (odstavec 2.9) snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci x^n na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

(d) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

(e) Funkce C (konstantní funkce) je primitivní k funkci 0 na $\mathbb{R}$.

□

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

Věta 24 (**O existenci primitivní funkce**). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I, potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

Důkaz. Uvedeme později, viz Poznámka 28(ii) v odstavci 3.4. □

Poznámka 19.

(i) Věta 24 udává postačující podmínku pro existenci primitivní funkce. Spojitost není nutnou podmínkou pro existenci primitivní funkce. Např. funkce

$$f(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

není spojitá v bodě $x = 0$, protože

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}} \Big) \qquad \text{neexistuje.}$$

Na druhé straně, funkce

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases} \tag{38}$$

je primitivní k $f(x)$ na celém $\mathbb{R}$, neboť pro $x \neq 0$ je

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \, . \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = f(x),$$

a pro $x = 0$ je

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

(ii) Je-li $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, potom je $F(x) + C$ také primitivní k $f(x)$ na intervalu I pro libovolnou konstantu $C \in \mathbb{R}$.

(iii) Jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na I, potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + C$ pro všechna $x \in I$ (tedy funkce $F(x)$ a $G(x)$ se liší o konstantu na celém intervalu I).

(iv) Důsledkem částí (ii) a (iii) je, že je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, potom

$$\big\{ F(x) + C, \ C \in \mathbb{R} \big\}$$

je množina všech primitivních fuknkcí k $f(x)$ na intervalu I. Tuto množinu budeme nazývat neurčitý integrál.

□

Příklad 84. Protože mají funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ a $G(x) = -\operatorname{arccotg} x$ stejnou derivaci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (viz Tvrzení 4), musí se tyto funkce lišit o konstantu, tj.

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Konstantu C můžeme určit např. z hodnot těchto funkcí v bodě $x = 0$,

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \qquad \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\pi}{2},$$

neboli platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Definice 17 (Neurčitý integrál). Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I se nazývá neurčitý integrál z funkce $f(x)$ na intervalu I. Tuto množinu budeme značit (zkráceně) jako

$$\int f(x)\,dx := \big\{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\big\} = F(x) + C,$$

tedy symbol množiny { } budeme (kvůli stručnosti) vynechávat. □

Příklad 85. Z pravidel pro derivování elementárních funkcí (odstavec 2.9, viz také Příklad 83) snadno dostáváme následující.

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C,\\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C,\\
\int e^x\,dx &= e^x + C,\\
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C,\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C, \qquad (39)\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \operatorname{arctg} x + C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C,\\
\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx &= \ln\big|f(x)\big| + C.
\end{aligned}$$

Ve vzorci (39) si všimněte, že na pravé straně je v logaritmu absolutní hodnota, neboť pro $x > 0$ je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ a pro $x < 0$ je $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. □

`Konec 5. přednášky (19.3.2007)`

3.2. **Základní integrační metody.**

Věta 25 (Pravidla pro neurčitý integrál).

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c\,.\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$, potom je $c\,.\,F(x)$ primitivní k $c\,.\,f(x)$.

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\int \big[f(x) \pm g(x)\big]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ a je-li $G(x)$ primitivní k $g(x)$, potom je $F(x) \pm G(x)$ primitivní k $f(x) \pm g(x)$.

Důkaz. Obě pravidla jsou jednoduchým důsledkem příslušného pravidla pro derivace (viz Věta 10):

$$[c\,.\,F(x)]' = c\,.\,F'(x) = c\,.\,f(x)$$
$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

□

Příklad 86.

(a)

$$\int (x^3 - 3x^2 + 5)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C,$$

(b)

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^6\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} + 2x^6\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 2\,\frac{x^7}{7} + C,$$

(c)

$$\int \left(2^x - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 2\,\ln|x| + C,$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{x^2+1}\right)dx &= 2\,\arcsin x + 5\,\operatorname{arctg} x + C,\\ &= -2\,\arccos x - 5\,\operatorname{arccotg} x + C.\end{aligned}$$

□

Další integrační pravidlo umopžňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z „jednoduššího“ součinu (viz příklady dále).

Věta 26 (Metoda per-partes pro neurčitý integrál). *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I. Potom platí*

$$\int u'(x)\,.\,v(x)\,dx = u(x)\,.\,v(x) - \int u(x)\,.\,v'(x)\,dx.$$

Důkaz. Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu (viz Věta 10(iii)) a pravidla pro integrál součtu (viz Věta 25(ii)):

$$[u\,v]' = u'\,v + u\,v', \quad \Rightarrow \quad \int [u\,v]' = \int (u'\,v + u\,v') \quad \Rightarrow \quad u\,v + C = \int u'\,v + \int u\,v'.$$

□

Příslušné výpočty pro metodu per partes budeme stejně jako u typu limity psát ve výpočtu mezi dvě svislé čary, viz následující příklad.

Příklad 87.

(a)

$$\int x\,\cos x\,dx \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x\,\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\,\sin x - (-\cos x) + C = \boxed{x\,\sin x + \cos x + C}.$$

(b)

$$\int x\,\ln x\,dx \quad \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\,\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{x^2}{4} + C}.$$

(c)

$$\int \ln x\,dx = \int 1\,.\,\ln x\,dx \quad \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right|$$
$$= x\,\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\,\ln x - \int 1\,dx = \boxed{x\,\ln x - x + C}.$$

(d)

$$\underbrace{\int e^x\,\sin x\,dx}_{\text{označme jako } I} \quad \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right|$$
$$= e^x\,\sin x - \int e^x\,\cos x\,dx \quad \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array} \right|$$
$$= e^x\,\sin x - \left\{ e^x\,\cos x - \int e^x\,(-\sin x)\,dx \right\}$$
$$= e^x\,\sin x - e^x\,\cos x - \underbrace{\int e^x\,\sin x\,dx}_{=I}$$

Tedy pro neznámý integrál I dostáváme rovnici

$$I = e^x\,(\sin x - \cos x) - I \quad \Rightarrow \quad 2I = e^x\,(\sin x - \cos x) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\,e^x\,(\sin x - \cos x),$$

a proto je

$$\int e^x \sin x \, dx = \boxed{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C}.$$

Ve všech příkladech ověřte, že zpětným derivováním výsledku dostanete příslušnou funkci v integrálu. □

Poznámka 20.

(i) Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n e^{ax} \, dx, \quad \int x^n \cos(ax) \, dx, \quad \int x^n \sin(ax) \, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax) \, dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax) \, dx, \quad \int x^a \ln^n x \, dx.$$

(ii) Metoda per-partes vede někdy na <u>rovnici pro neznámý integrál</u> (viz Příklad 87(d)), např.

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx, \quad \int e^{ax} \sin(bx) \, dx.$$

(iii) Metoda per-partes vede někdy na <u>rekurentní formuli pro neznámý integrál</u> (viz následující Příklad 88).

□

Příklad 88. Určete

$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \, dx.$$

Řešení. Zřejmě je

$$K_0(x) = \int 1 \, dx = \boxed{x + C},$$

$$K_1(x) = \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \boxed{\operatorname{arctg} x + C}.$$

Neznámý integrál K_n (pro $n \geq 2$) vypočítáme metodou per-partes:

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \int 1 \, . \, (x^2+1)^{-n} \, dx \quad \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = (x^2+1)^{-n} & v' = -n(x^2+1)^{-n-1} \, . \, 2x \end{array} \right| \\
&= x \, (x^2+1)^{-n} - \int x \, . \, (-n) \, (x^2+1)^{-n-1} \, . \, 2x \, dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \, dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} \, dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} \right) dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \, [K_n(x) - K_{n+1}(x)] = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \, K_n(x) - 2n \, K_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Tedy platí vztah

$$2n\,K_{n+1}(x)=\frac{x}{(x^2+1)^n}+(2n-1)\,K_n(x)\quad\Rightarrow\quad\boxed{K_{n+1}(x)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot K_n(x)}.$$

Např. volbou $n=1$ vypočítáme integrál $K_2(x)$:

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=K_2(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot K_1(x)=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C}.$$

□

Další dvě integrační metody (Věta 27 a Věta 28) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce (Věta 11).

Věta 27 (Substituce pro neurčitý integrál). *Nechť je funkce $f(t)$ definovaná na intervalu I a nechť $\varphi(x)$ je definovaná na intervalu J a $\varphi(J)\subseteq I$. Je-li funkce $F(t)$ primitivní k funkci $f(t)$ na intervalu I, potom je funkce $(F\circ\varphi)(x)$ primitivní k funkci $[(f\circ\varphi)(x)]\,.\,\varphi'(x)$ na intervalu J, tj.*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,.\,\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt\quad\Big[=F(t)=F\big(\varphi(x)\big)\Big].$$

Neboli v daném integrálu volíme <u>*substituci*</u> $\boxed{t=\varphi(x)}$.

Důkaz. Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci složené funkce (viz Věta 11):

$$[F\big(\varphi(x)\big)]'=F'\big(\varphi(x)\big)\,.\,\varphi'(x)=f\big(\varphi(x)\big)\,.\,\varphi'(x)\quad\Rightarrow\quad\underbrace{\int[F\big(\varphi(x)\big)]'\,dx}_{=F\left(\varphi(x)\right)}=\int f\big(\varphi(x)\big)\,.\,\varphi'(x)\,dx.$$

□

Substituční metodu budeme opět zapisovat do našeho výpočtu mezi dvě svislé čáry.

Příklad 89.

(a)

$$\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx\quad\left|\begin{array}{l}t=x^2+1\\ dt=2x\,dx\end{array}\right|=\int\frac{1}{t^2}\,dt=\int t^{-2}\,dt=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t}+C=\boxed{-\frac{1}{x^2+1}+C}$$

(b)

$$\int x^2\cos x^3\,dx\quad\left|\begin{array}{l}t=x^3\\ dt=3x^2\,dx\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\boxed{\frac{1}{3}\sin x^3+C}.$$

□

Poznámka 21.

(i) Ve výpočtu pomocí substituční metody se používá vzoreček pro <u>diferenciál</u> (viz Definice 14), neboli

$$t=\varphi(x)\quad\Rightarrow\quad\boxed{dt=\varphi'(x)\,dx}.$$

(ii) Substituce uvedená ve Větě 27 je tedy tvaru

„nová proměnná“ $t \;=\;$ funkce „staré proměnné“ x.

Integrál po substituci již nesmí obsahovat „starou proměnnou“ x a musí již být zapsán pouze pomocí „nové proměnné“ t.

(iii) Pokud bychom jako „novou proměnnou“ zvolili jiné písmenko, např. $s = \varphi(x)$, potom je samozřejme $ds = \varphi'(x)\,dx$ a nový integrál bude v proměnné s.

□

Druhá substituční metoda je opět důsledkem pravidla o derivaci součinu.

Věta 28 (Substituce pro neurčitý integrál). *Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu I a nechť $\psi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a $\psi(J) = I$. Je-li funkce $F(t)$ primitivní k funkci $[(f \circ \psi)(t)]\,.\,\psi'(t)$ na intervalu J, potom je funkce $(F \circ \psi^{-1})(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, tj.*

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\psi(t)\big)\,.\,\psi'(t)\,dt = \quad \Big[= F(t) = F\big(\psi^{-1}(x)\big)\Big].$$

Neboli v daném integrálu volíme substituci $\boxed{x = \psi(t)}$, tj. $t = \psi^{-1}(x)$ (inverzní funkce).

Poznámka 22.

(i) Taktéž ve výpočtu pomocí druhé substituční metody se používá vzoreček pro diferenciál (viz Definice 14), neboli

$$x = \psi(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \psi'(t)\,dt}.$$

(ii) Substituce uvedená ve Větě 28 je tedy tvaru

„stará proměnná“ $x \;=\;$ funkce „nové proměnné“ t.

Integrál po substituci již nesmí obsahovat „starou proměnnou“ x a musí již být zapsán pouze pomocí „nové proměnné“ t.

(iii) Pokud bychom jako „novou proměnnou“ zvolili jiné písmenko, např. $x = \psi(u)$, potom je samozřejme $dx = \psi'(u)\,du$ a nový integrál bude v proměnné u.

(iv) U druhé substituční metody (tj. ve Větě 28) je nutné dávat pozor na interval, kde $\psi'(t) \neq 0$. Tato podmínka zaručuje monotonii funkce $\psi(t)$ a tedy existenci inverzní funkce $\psi^{-1}(x)$.

□

Příklad 90.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \left|\begin{array}{l} x=\sin t \\ dx=(\cos t)\,dt \end{array}\right| = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \underbrace{\cos t\,dt}_{dx}$$
$$= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt$$
$$= \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2}+C = \frac{t}{2}+\frac{1}{2}(\sin t)(\cos t)+C$$
$$= \frac{t}{2}+\frac{1}{2}(\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t}+C \quad \left|\ t=\arcsin x\ \right|$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C}.$$

Ověřte si derivováním výsledku, že je tento výpočet skutečně správně. □

3.3. **Integrování racionálních lomených funkcí.** Je-li $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ racionální lomená funkce (viz odstavec 1.6), provedeme nejprve dělení, abychom dostali ryze racionální lomenou funkci.

Příklad 91.

$$\frac{x^3+x^2}{x^2+1} = \underbrace{x+1}_{\substack{\text{umíme}\\ \text{integrovat}}} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

□

Dále ryze racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky, přičemž v odstavci 1.6 jsme viděli, že tyto parciální zlomky mají jeden z následujících tvarů.

- Pro reálný jednoduchý kořen x_0:

$$\frac{A}{x-x_0}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{A}{x-x_0}\,dx = \boxed{A\ln|x-x_0|}.$$

- Pro reálný vícenásobný kořen x_0 $(n\geq 2)$:

$$\frac{A}{(x-x_0)^n},\quad \frac{B}{(x-x_0)^{n-1}},\quad \dots,\quad \frac{C}{x-x_0} \quad \Rightarrow \quad \text{pro } k=2,\dots,n:$$
$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx = A\int (x-x_0)^{-k}\,dx = A\,\frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} = \boxed{\frac{A}{(1-k)\,(x-x_0)^{k-1}}}.$$

- Pro dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů $\alpha\pm\beta i$:

$$\frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar t^2+1, kde $t=\frac{x-\alpha}{\beta}$. Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Dt+E}{t^2+1}\,dt = D\int \frac{t}{t^2+1}\,dt + E\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \boxed{\frac{D}{2}\ln(t^2+1)} + \boxed{E\,\operatorname{arctg} t}.$$

- Pro dvojici vícenásobných komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm \beta i$ ($n \geq 2$):

$$\frac{Bx+C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}, \quad \frac{Dx+E}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{Fx+G}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{pro } k=2,\dots,n:$$

$$\int \frac{Bx+C}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\,dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar $(t^2+1)^k$, kde $t=\frac{x-\alpha}{\beta}$. Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Ht+J}{(t^2+1)^k}\,dt = H\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\,dt + J\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,dt,$$

přičemž první z uvedených integrálů vypočteme substitucí $s=t^2+1$ (potom $ds=2t\,dt$) a druhý z uvedených integrálů je integrál $K_n(x)$ z Příkladu 88 (přesněji v tomto případě $K_k(t)$), který vede na rekurentní formuli.

Příklad 92. Vypočtěte

$$\int \frac{x^3+6x^2+5}{(x+1)^2\,(x^2+4)}\,dx.$$

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{x^3+6x^2+5}{(x+1)^2\,(x^2+4)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Odsud plyne, že $A=2$, $B=-1$, $C=2$, $D=1$ a tedy je

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+6x^2+5}{(x+1)^2\,(x^2+4)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right)dx\\ &= \frac{-2}{x+1} - \ln|x+1| + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx\\ &= \boxed{\frac{-2}{x+1} - \ln|x+1| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C},\end{aligned}$$

přičemž předposlední integrál jsme spočítali pomocí substituce $t=x^2+4$ (tj. $dt=2x\,dx$) a poslední integrál pomocí substituce $t=\frac{x}{2}$ (tj. $dt=\frac{1}{2}\,dx$). □

Mno dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech prof. Slováka.

Poznámka 23. Někdy ani nelze daný integrál vůbec spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{x}{\ln x}\,dx, \quad \int \sin(x^2)\,dx, \quad \int \cos(x^2)\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int e^{x^2}\,dx.$$

Z věty o existenci primitivní funkce (Věta 24) ale víme, že k uvedeným funkcím existuje primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají vyšší funkce (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).

Pozn.: Pozor ale na

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C, \qquad \text{(není to vyšší funkce)!}$$

$\square$

3.4. **Riemannův integrál.** V tomto odstavci budou uvažované funkce vždy ohraničené.

Základní otázka tohoto odstavce zní: Jaká je plocha mezi $f(x)$ a osou x (na intervalu $[a, b]$)?

Příklad 93.

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$ (viz obr.), $\boxed{P = 4}$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$ (viz obr.), $\boxed{P = k\,(b - a)}$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$ (viz obr.), $P = \frac{1}{2}\,4^2 = \boxed{8}$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$ (viz obr.), $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = \boxed{6}$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$ (viz obr.), $\boxed{P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2}$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$ (viz obr.), $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

(g) $f(x) = -2x + 1$ pro $x \in [1, 2]$ (viz obr.), $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$. Ale protože je plocha pod osou x, klademe $\boxed{P = -2}$.

(h) $f(x) = x^3$ pro $x \in [-1, 1]$ (viz obr.), plocha je stejná nad i pod osou x, a proto klademe $\boxed{P = 0}$.

$\square$

Tato „orientovaná plocha" se nazývá určitý integrál (též Riemannův integrál) z funkce $f(x)$ přes interval $[a, b]$ a značíme ji

$$P = \int_a^b f(x)\,dx = \begin{array}{l}\text{orientovaná plocha mezi grafem}\\ \text{funkce } f(x) \text{ a osou } x\end{array}.$$

Příklad 94. Tedy výpočty uvedené v Příkladu 93 můžeme alternativně zapsat následovně:

(a) $\boxed{\int_{-1}^{1} 2\,dx = 4}$,

(b) $\boxed{\int_a^b k\,dx = k\,(b - a)}$,

(c) $\boxed{\int_0^4 x\,dx = 8}$,

(d) $\boxed{\int_2^4 x\,dx = 6}$,

(e) $\boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2}$,

(f) $\boxed{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}}$,

(g) $\boxed{\int_{-1}^{1} (-2x+1)\,dx = -2}$,

(h) $\boxed{\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0}$.

$\square$

Skutečnou plochu mezi $f(x)$ a osou x odhadneme pomocí „vepsaných“ a „opsaných“ obdélníků (viz obr.), čímž dostaneme dolní odhad $s(D,f)$ pro skutečnou plochu a horní odhad $S(D,f)$ pro skutečnou plochu.

Definice 18 (Dělení intervalu). Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Dělením intervalu $[a,b]$ je konečná množina bodů $D \subseteq [a,b]$ s vlastností $a,b \in D$. Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \text{kde} \qquad x_0 = a, \qquad x_n = b.$$

Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se nazývají dělící body a interval $[x_{k-1}, x_k]$ se nazývá dělící (pod)interval.

Délka největšího dělícího podintervalu je pak norma dělení D, tj. je to číslo

$$n(D) := \max_{k=1,\ldots,n} \{x_k - x_{k-1}\}. \tag{40}$$

Množinu všech dělění intervalu $[a,b]$ označujeme jako $\mathbb{D}[a,b]$ či jenom jako $\mathbb{D}$. $\square$

Pro ohraničenou funkci $f(x)$ na $[a,b]$ a dělení D intervalu $[a,b]$ zaveďme označení

$$m_k := \inf\big\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\big\}, \qquad \text{(viz obr.)}$$

$$M_k := \sup\big\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\big\}, \qquad \text{(viz obr.)}$$

$$s(D,f) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \text{dolní součet funkce } f(x) \text{ při dělení } D,$$

$$S(D,f) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \text{horní součet funkce } f(x) \text{ při dělení } D.$$

Tvrzení 5. *Nechť $c \le f(x) \le d$ pro každé $x \in [a,b]$. Potom pro každá dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathbb{D}[a,b]$ platí*

$$c\,(b-a) \le s(D_1,f) \le S(D_2,f) \le d\,(b-a),$$

tj. dolní součet libovolného dělení je nejvýše roven hornímu součtu libovolného dělení, přičemž všechny dolní součty jsou zdola ohraničeny číslem $c\,(b-a)$ a všechny horní součty jsou shora ohraničeny číslem $d\,(b-a)$ (viz obr.).

Při vzrůstajícím počtu dělících bodů x_k v dělení D_1, D_2 se bude dolní součet $s(D_1,f)$ zvětšovat a zároveň horní součet $S(D_2,f)$ zmenšovat.

Definice 19 (Dolní a horní integrál). Číslo

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\left\{s(D,f),\ D \in \mathbb{D}\right\}$$

nazýváme dolním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

Číslo

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\left\{S(D,f),\ D \in \mathbb{D}\right\}$$

nazýváme horním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$. □

Současně víme, že vždy je

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f.$$

Navíc, pokud je $c \le f(x) \le d$ na intervalu $[a,b]$, potom podle Tvrzení 5 je

$$c\,(b-a) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le d\,(b-a). \tag{41}$$

`Konec 6. přednášky (26.3.2007)`

Definice 20 (Určitý (Riemannův) integrál). Je-li

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná (v Riemannově smyslu) na $[a,b]$ a toto společné číslo značíme

$$\boxed{\int_a^b f} := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Množinu všech (Riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a,b]$.

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ není integrovatelná na $[a,b]$. □

Riemannův integrál přes interval $[a,b]$ je tedy číslo. Zápis pro Riemannův integrál budeme používat také ve tvaru s integrační proměnnou, např.

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b f(t)\,dt, \qquad \text{a podobně.}$$

Příklad 95.

(a) Pro <u>konstantní funkci</u> $f(x) = c$ máme $m_k = M_k = c$ pro všechny k a tedy je

$$s(D, f) = c\,(b-a), \quad S(D, f) = c\,(b-a) \quad \text{(viz obr.)}, \qquad \forall D \in \mathbb{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} k = \sup\{c\,(b-a)\} = c\,(b-a), \qquad \overline{\int_a^b} k = \inf\{c\,(b-a)\} = c\,(b-a) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{c \in \mathcal{R}[a, b]} \quad \text{a platí} \quad \int_a^b c = \underline{\int_a^b} k = \overline{\int_a^b} k = \boxed{c\,(b-a)}.$$

Viz Příklad 94(b).

(b) <u>Dirichletova funkce</u> χ [chí]

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \\ 0, & \text{pro } x \in \mathbb{I} \cap [a, b], \end{cases}$$

Potom $m_k = 0$ a $M_k = 1$ pro všechna k a tedy je

$$s(D, \chi) = 0, \quad S(D, \chi) = b - a \quad \text{(viz obr.)}, \qquad \forall D \in \mathbb{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} \chi = \sup\{s(D, \chi)\} = \sup\{0\} = 0, \qquad \overline{\int_a^b} k = \inf\{S(D, \chi)\} = \inf\{b-a\} = b - a \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} \chi < \overline{\int_a^b} \chi \quad \text{a tedy} \quad \boxed{\chi \notin \mathcal{R}[a, b]} \quad (\chi \text{ není integrovatelná}).$$

□

Jak ale obecně určíme, zda je daná funkce integrovatelná (a pak jakou hodnotu má její určitý integrál) či nikoliv?

<u>Nulová posloupnost dělení</u> $D_k \in \mathbb{D}$ je taková posloupnost dělení, která splňuje $\boxed{n(D_k) \to 0}$ pro $k \to \infty$, neboli norma dělení (viz vzorec (40)) jde k nule.

Věta 29. *Nechť je funkce $f(x)$ ohraničená na intervalu $[a, b]$. Potom pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $D_k \in \mathbb{D}$ platí, že*

$$s(D_k, f) \to \underline{\int_a^b} f, \qquad S(D_k, f) \to \overline{\int_a^b} f, \qquad \textit{pro } k \to \infty.$$

Je-li navíc $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom dolní součty $s(D_k, f)$ i horní součty $S(D_k, f)$ konvergují (ve smyslu existence vlastní limity) k číslu $\int_a^b f$.

Z Věty 29 vyplývá, že <u>pokud víme</u>, že je $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom lze $\int_a^b f$ určit limitním přechodem pomocí <u>libovolné</u> nulové posloupnosti dělení intervalu $[a, b]$.

Příklad 96. Víme-li, že je funkce $f(x) = x^2$ integrovatelná na intervalu $[0, 1]$ (viz např. Věta 30 uvedená níže), potom určete $\int_0^1 x^2\,dx$.

Řešení. Připomeňme si vzorec

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6}. \tag{42}$$

Rozdělíme interval $[0,1]$ na n stejných dělících intervalů délky $\frac{1}{n}$. Potom jsou dělící body $x_k = \frac{k}{n}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$ (viz obr.) a norma takového dělení je právě číslo $\frac{1}{n}$. Tedy jedná se o nulovou posloupnost dělení.

Navíc, protože je funkce x^2 rostoucí, je její infimum na k–tém dělícím intervalu dosaženo v levém krajním bodě. Tedy platí, že pro libovolné $k = 1, 2, \ldots, n$ je $m_k = x_{k-1}^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}$, a proto

$$\begin{aligned} s(D_k, f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \,.\, (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \overset{(42)\text{ s } n-1}{=} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)\,(n-2)\,(2n-3)}{6} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A proto je

$$\boxed{\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}}.$$

□

Zásadní otázku, které funkce jsou vlastně (Riemannovsky) integrovatelné, zodpovídá následující tvrzení.

Věta 30.

(i) *Každá spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ je zde také integrovatelná, neboli*

$$\boxed{C[a,b] \subseteq \mathcal{R}[a,b]}.$$

(ii) *Každá monotónní funkce na intervalu $[a,b]$ je zde také integrovatelná.*

Poznámka 24. Riemannův integrál (tj. vlastně orientovaná plocha) se zřejmě nezmění, pokud je integrovatelná funkce $f(x)$ nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině „míry nula“), viz obr. Tímto dostáváme určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval. Zejména pro (ohraničené) intervaly všech typů (a,b), $(a,b]$ i $[a,b)$ je příslušný určitý integrál přes tento interval roven již dříve definovanému číslu $\int_a^b f$, tj. Riemannově integrálu přes uzavřený interval $[a,b]$. □

Příklad 97. Pro nespojitou funkci $\operatorname{sgn} x$ (viz Příklad 17(a)) platí (viz obr.)

$$\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn} x \, dx = 3 + (-2) = \boxed{1}.$$

Obdobně lze ukázat (rozvažte si to), že pro $a < 0 < b$ je

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx = a + b.$$

□

3.5. **Vlastnosti Riemannova integrálu.** V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti Riemannova integrálu. Stále mějte na paměti, že se vlastně jedná o „orientovanou plochu" mezi grafem funkce a osou x.

Věta 31. *Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná a ohraničená na intervalu $[a, b]$, tj. $c \leq f(x) \leq d$ pro všechna $x \in [a, b]$, potom*

$$c\,(b-a) \leq \int_a^b f \leq d\,(b-a),$$

(viz obr.).

Důkaz. Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem nerovnosti (41), neboť nyní předpokládáme, že je funkce $f(x)$ integrovatelná. □

Důsledek 7. *Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$, potom platí*

$$f(x) \geq 0 \quad \text{na } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \geq 0,$$ *(tj. orientovaná plocha pod nezápornou funkcí je nezáporná),*

$$\big|f(x)\big| \leq c \quad \text{na } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f \right| \leq c\,(b-a).$$

Věta 32 (Pravidla pro určitý integrál). *Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ($f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné) a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta.*

(i) *Pravidlo konstantního násobku: $c \,.\, f \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí*

$$\int_a^b c \,.\, f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu: $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí*

$$\int_a^b \big[f(x) \pm g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

(iii) *Pravidlo monotonie: je-li $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, potom*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(iv) *Pravidlo absolutní hodnoty: $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

(v) *Pravidlo součinu: $f \,.\, g \in \mathcal{R}[a, b]$.*

(vi) *Pravidlo podílu: je-li $g(x) \geq c$ na intervalu $[a, b]$ pro nějaké $c > 0$, potom je $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$.*

(vii) *Pravidlo návaznosti: je-li $a < c < b$, potom je $f \in \mathcal{R}[a, c]$, $f \in \mathcal{R}[c, b]$ a platí (viz obr.)*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Poznámka 25. Všimněte si, že pravidla (i) a (ii) vlastně říkají, že operace „určitý integrál" je lineární. Tj. zobrazení

$$I : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad I(f) := \int_a^b f$$

je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory $\mathcal{R}[a,b]$ a $\mathbb{R}$ (viz MB101). □

Poznámka 26.

(i) V pravidle součinu (Věta 32(v)) pro určitý integrál je zřejmě (obecně)

$$\int_a^b f \cdot g \neq \Big(\int_a^b f\Big) \cdot \Big(\int_a^b g\Big).$$

(ii) V pravidle podílu (Věta 32(vi)) nestačí, aby $g(x) > 0$ na intervalu $[a,b]$, tj. je nutné, aby byla funkce ve jmenovateli „odražena od 0". Např. pro funkce

$$f(x) := 1 \quad \text{na } [0,1], \qquad g(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x = 0, \\ x, & \text{pro } x \in (0,1], \end{cases}$$

platí, že $f \in \mathcal{R}[0,1]$, $g \in \mathcal{R}[0,1]$, protože $\int_0^1 f = 1$ a $\int_0^1 g = \frac{1}{2}$. Dále je $g(x) > 0$ na celém intervalu $[0,1]$, ale funkce

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{pro } x \in (0,1], \end{cases}$$

není integrovatelná na intervalu $[0,1]$, protože

$$\int_0^1 \frac{f}{g} = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \infty, \qquad \text{(viz odstavec 3.10).}$$

Funkci $g(x)$ nelze „odrazit od 0", protože se k nule blíží (a tedy je funkce $\frac{1}{g(x)}$ neohraničená).

(iii) Pravidlo návaznosti (Věta 32(vii)) lze jednoduše rozšířit na libovolné hodnoty $a, b, c \in \mathbb{R}$ (dokonce mohou být některá tato čísla stejná), pokud definujeme

$$\int_a^a f := 0, \qquad \text{(tj. „plocha" pod jediným bodem je nulová),}$$

$$\int_b^a f := -\int_a^b f. \qquad \text{(tj. záměna integračních mezí mění znaménko určitého integrálu).}$$

Potom podle pravidla návaznosti zřejmě platí

$$\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0.$$

□

Příklad 98.

(a) Podle pravidla součtu a podle Příkladů 96 a 94(e) je

$$\int_0^1 (x^2 + x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

(b) Podle pravidla konstantního násobku a podle Příkladu 96 je

$$\int_0^1 2x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

(c) Podle pravidla rozdílu a podle Příkladu 96 je (viz obr.)

$$\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = 1-\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

□

3.6. **Věty o střední hodnotě.** Stejně tak jako má diferenciální počet své věty o střední hodnotě (viz odstavec 2.10), jsou podobné věty důležité i v integrálním počtu.

Začněme následujícím motivačním příkladem. Pokud máme konečně mnoho čísel $a_1, \dots, a_n$, potom jejich průměrná hodnota je

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Tedy průměrná hodnota čísel $f(c_1), \dots, f(c_n)$ je pak

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k).$$

Položme si otázku, co by se stalo, kdybychom nahradili konečně mnoho čísel $f(c_1), \dots, f(c_n)$ nekonečně mnoha funkčními hodnotami $f(x)$, tj. analyzujme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\substack{\text{délka dělících}\\ \text{subintervalů}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\cdot\big(\text{Riemannův součet, ale místo } m_k \text{ či } M_k \text{ je zde } f(c_k)\big)$$
$$\to \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

Definice 21 (Průměr funkce). Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Potom číslo

$$av(f) = av_{[a,b]}(f) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

nazýváme průměrnou hodnotou (též střední hodnotou) funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$. Označení je z angličtiny „average value“. □

Příklad 99.

(a) Pro funkci $f(x) = c$ na intervalu $[a, b]$ platí

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b c\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot c\,(b-a) = \boxed{c},$$

tj. průměrná hodnota konstantní funkce je samozřejmě tatáž konstanta.

(b) Pro funkci $f(x) = x$ na intervalu $[a, b]$ platí (viz Příklad 94(e))

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \boxed{\frac{b+a}{2}}.$$

(c) Pro funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ platí

$$av(f) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\,dx = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

□

V dalším textu označme

$$m := \inf\{f(x),\ x\in[a,b]\}, \qquad M := \sup\{f(x),\ x\in[a,b]\},$$

tj. platí pak $m \le f(x) \le M$ na intervalu $[a, b]$.

Nyní uvedeme důležitou větu o střední hodnotě integrílního počtu. I když tato věta plyne až z následující věty, uvádíme ji jako první, protože bude pro nás velmi důležitá.

Věta 33 (O střední hodnotě integrálního počtu).

(i) *Nechť $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, $m \le c \le M$, takové, že*

$$\int_a^b f = c\,(b-a), \qquad tj. \qquad c = av(f),$$

tj. plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x je rovna obsahu obdélníka se základnou $[a, b]$ a výškou c (viz obr.).

(ii) *Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá na $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ s vlastností, že*

$$f(x_0) = c = av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f,$$

tj. spojitá funkce $f(x)$ nabývá svou průměrnou hodnotu v intervalu $[a, b]$.

Důkaz. Plyne z následující Věty 34 volbou $g(x) \equiv 1$ na $[a, b]$. □

Příklad 100. Funkce $f(x) = 4 - x^2$ má na intervalu $[0, 3]$ průměrnou hodnotu

$$av(f) = \frac{1}{3}\int_0^3 (4-x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\,dx - \int_0^3 x^2\,dx\right) = \frac{1}{3}\cdot(12-9) = 1,$$

(Integrál $\int_0^3 x^2\,dx = 9$ lze spočítat podobně jako Příklad 96.)

Podle Věty 33(i) tedy pro číslo $c = av(f) = 1$ platí, že

$$\int_0^3 (4-x^2)\,dx = c\,(b-a) = 1\,.\,3 = 3.$$

Dále, protože je funkce $4 - x^2$ spojitá na intervalu $[0, 3]$, existuje podle Věty 33(ii) bod $x_0 \in [0, 3]$ s vlastností, že $f(x_0) = 4 - x_0^2 = 1$. Zřejmě se jedná o bod $x_0 = \sqrt{3}$, viz obr. □

Poznámka 27. To, že spojitá funkce nabývá svou průměrnou hodnotu, je vlastnost, která obecně neplatí pro konečně mnoho hodnot. Je to velmi důležitá vlastnost! □

Příklad 101. Pokud je funkce $f(x)$ nespojitá na intervalu $[a, b]$, potom svou průměrnou hodnotu nabývat nemusí. Např. pro funkci $f(x)$ na intervalu $[-1, 1]$ definovanou jako

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{pro } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{pro } x \in [0, 1], \end{cases}$$

je (viz obr.)

$$av(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,$$

ale funkce $f(x)$ nenabývá hodnotu 0 nikde v intervalu $[-1, 1]$. □

Věta 34. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ a $g(x) \geq 0$ na $[a, b]$.*

(i) *Existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$, takové, že*

$$\int_a^b f \,.\, g = c \int_a^b g.$$

(ii) *Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá na $[a, b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ s vlastností, že $f(x_0) = c$, tj.*

$$\int_a^b f \,.\, g = f(x_0) \int_a^b g.$$

Důkaz. (i) Protože je $m \leq f(x) \leq M$ a současně $g(x) \geq 0$ na intervalu $[a, b]$, platí nerovnosti

$$m \,.\, g(x) \leq f(x) \,.\, g(x) \leq M \,.\, g(x) \qquad \text{pro } x \in [a, b].$$

Je-li $\int_a^b g = 0$, potom z pravidla monotonie určitého integrálu (Věta 32(iii)) je

$$0 = m \int_a^b g \leq \int_a^b f \,.\, g \leq M \int_a^b g = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \,.\, g = 0$$

a tudíž číslo c můžeme zvolit libovolně.

Je-li $\int_a^b g > 0$ (neboť $g(x) \geq 0$ na $[a, b]$), potom platí nerovnosti

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b f \,.\, g \leq M \int_a^b g, \qquad \Rightarrow \qquad m \leq \frac{\int_a^b f \,.\, g}{\int_a^b g} \leq M,$$

a tudíž číslo

$$c := \frac{\int_a^b f \,.\, g}{\int_a^b g}$$

splňuje tvrzení této věty.

(ii) Je-li $f(x)$ spojitá na $[a, b]$, potom podle Weierstrassovy věty (Věta 6) nabývá $f(x)$ svého maxima ($=M$) a minima ($=m$) v intervalu $[a, b]$. Dále, podle Bolzanovy věty (Věta 7) nabývá $f(x)$ všech hodnot mezi m a M, a tedy nabývá i hodnotu c, tj. $f(x_0) = c$ pro nějaký bod $x_0 \in [a, b]$. □

3.7. **Integrál jako funkce horní meze.** Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na $[a,b]$, potom je podle Věty 32(vii) také integrovatelná na intervalu $[a,x]$ pro každé $x \in [a,b]$. Tedy předpis

$$\boxed{F(x) := \int_a^x f} = \int_a^x f(t)\,dt$$

definuje funkci $F(x)$, která je řádně definovaná pro všechna $x \in [a,b]$.

Zřejmě je

$$F(a) = \int_a^a f = 0 \quad \text{a} \quad F(b) = \int_a^b f.$$

V tomto odstavci budeme studovat vlastnosti této funkce $F(x)$.

Zřejmě je hodnota $F(x)$ obsah (orientované) plochy mezi grafem funkce $f(t)$ na intervalu $[a,x]$ (viz obr.).

Příklad 102. Pro (nespojitou) funkci

$$f(x) := \begin{cases} 5, & \text{pro } x \in [0,1), \\ 10, & \text{pro } x \in [1,2], \end{cases}$$

je (viz obr.)

$$F(x) := \begin{cases} 5x, & \text{pro } x \in [0,1], \\ 10x - 5, & \text{pro } x \in [1,2], \end{cases}$$

□

V následujích dvou tvrzeních uvidíme, že funkce $F(x)$ „vylepšuje“ vlastnosti funkce f. Viz např. předchozí Příklad 102, kdy z nespojité funkce $f(x)$ dostaneme spojitou funkci $F(x)$.

Věta 35. *Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (tedy funkce $f(x)$ může být i nespojitá). Potom je funkce*

$$F(x) := \int_a^x f$$

spojitá na intervalu $[a,b]$.

Důkaz. Důkaz provedeme pro ohraničenou funkci $f(x)$, tj. $|f(x)| \le c$ na intervalu $[a,b]$ pro nějaké $c > 0$. Obecný případ (bez předpokladu ohraničenosti funkce $f(x)$) lze najít v literatuře o integrálním počtu.

Nechť $x_0 \in [a,b]$ je libovolný bod. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, neboli že

$$F(x) - F(x_0) \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to x_0.$$

Platí, že (viz obr.)

$$\big|F(x) - F(x_0)\big| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \le \left| \int_{x_0}^x |f| \right| \le \left| \int_{x_0}^x c \right| = c\,\underbrace{|x - x_0|}_{\to 0} \to 0.$$

Tedy je funkce $F(x)$ spojitá v bodě x_0. A protože byl tento bod vybrán v intervalu $[a,b]$ libovolně, je $F(x)$ spojitá na $[a,b]$. □

Další otázkou je, jak rychle se mění funkce $F(x)$? Takto jednoduše položená otázka je ale jednou z nejdůležitějších v tomto předmětu. Odpověď zní: Tak rychle, jaké jsou hodnoty funkce $f(x)$.

Věta 36. *Je-li $f(x)$ spojitá na nějakém okolí bodu x_0, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Důkaz. Podle Poznámky 4(v) je

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\begin{array}{l} \text{průměrná hodnota} \\ \text{funkce } f(t) \text{ na} \\ \text{intervalu } [x_0, x_0+h] \end{array} \right) = \lim_{h\to 0} av_{[x_0,x_0+h]}(f) = \lim_{h\to 0} f(c),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o střední hodnotě integrálního počtu ($f(x)$ je spojitá na intervalu $[x_0, x_0+h]$ pro h dostatečně malé, a tudíž nabývá v tomto intervalu svou střední hodnotu, viz Věta 33(ii)), kde bod c leží mezi body x_0 a x_0+h.

Všimněte si, že číslo h ve výše uvedené limitě nemusí být nutně kladné. Ale i pro $h < 0$ či pro $h = 0$ jsme příslušné integrály definovali v Poznámce 26(iii).

Tedy platí, že

$$x_0 \le c \le x_0 + h \qquad \text{pro } h > 0,$$

$$x_0 + h \le c \le x_0 \qquad \text{pro } h < 0.$$

Odsud ale plyne, že jakmile $h \to 0$, pak $c \to x_0$. A protože je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0, platí $f(c) \to f(x_0)$, neboli

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x_0).$$

□

Důsledek 8 (Fundamentální vztah integrálního počtu). *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f$ spojitou derivaci $F'(x) = f(x)$ na $[a, b]$, tj. platí vztah*

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\, dt \right)' = f(x)}. \tag{43}$$

Poznámka 28.

(i) Vztah (43) v sobě soustřeďuje poznatky o

- <u>derivaci</u> – protože tento vztah obsahuje derivaci,
- <u>neurčitém integrálu</u> – protože je funkce $\int_a^x f(t)\, dt$ primitivní k funkci $f(x)$,
- <u>určitém integrálu</u> – protože tento vztah obsahuje určitý integrál,
- <u>spojitosti</u> – protože je tento vztah založen na spojitosti funkce $f(x)$.

(ii) Důsledek 8 je vlastně důkaz věty o existenci primitivní funkce (Věta 24), protože říká nejen to, že primitivní funkce $F(x)$ ke spojité funkci na $[a, b]$ <u>existuje</u>, ale dokonce udává návod, jakým způsobem tuto primitivní funkci <u>zkonstruovat</u> (pomocí určitého integrálu s proměnnou horní mezí).

(iii) Místo $\int_a^x f$ můžeme vzít také $F(x) = \int_c^x f$ pro <u>libovolné</u> $c \in [a, b]$, protože podle pravidla návaznosti (Věta 32(vii)) je

$$\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)' = \Big(\underbrace{\int_c^a f(t)\,dt}_{\substack{\text{konstanta}\\ \text{vzhledem k } x}} + \int_a^x f(t)\,dt\Big)' = 0 + \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

□

Konec 7. přednášky (2.4.2007)

Poznámka 29. Vztah (43) lze jednoduše použít pro rychý zápis primitivní funkce, např. primitivní funkce k funkci

$$\text{(a)}\quad x^2 \quad \text{je} \quad F(x) = \int_0^x t^2\,dt, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{x} \quad \text{je} \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Tyto primitivní funkce lze ovšem vypočítat (viz následující odstavec 3.8), např.

$$\text{(a)} \int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{x^3}{3}, \qquad \text{tedy} \quad \left(\int_0^x t^2\,dt\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2,$$

$$\text{(b)} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \big[\ln t\big]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x, \qquad \text{tedy} \quad \left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

a ověřit tak přímo platnost vztahu (43).

Na druhou stranu lze vztah (43) využít i pro konstrukci primitivních funkcí k vyšším funkcím (viz Poznámka 23), např. primitivní funkce k funkci

$$\text{(a)}\quad \frac{\sin x}{x} \quad \text{je} \quad F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad \text{(b)}\quad \cos(x^2) \quad \text{je} \quad F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt,$$

kde dané integrály vypočítat nelze.

(Výše uvedené integrály je možné ale vyjádřit pomocí nekonečné mocninné řady, viz dále odstavec 4.5.) □

Příklad 103. <u>Bez výpočtu</u>, tedy pouze na základě znalosti vztahu (43), můžeme proto psát např.

$$\left(\int_0^x t^2 \sin t\,dt\right)' = x^2 \sin x, \qquad \left(\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)' = \frac{e^x}{x}.$$

□

Protože je $\boxed{\int_c^x f = -\int_x^c f}$, pro integrál jako funkci <u>dolní meze</u> platí

$$G(x) := \int_x^c f, \qquad G'(x) = \left(\int_x^c f\right)' = \left(-\int_c^x f\right)' = -\left(\int_c^x f\right)' = -f(x),$$

a tedy je

$$\boxed{\left(\int_x^c f(t)\,dt\right)' = -f(x)}. \tag{44}$$

To znamená, že

> při derivování intergálu podle <u>horní meze</u> dostaneme původní funkci $f(x)$, zatímco při derivování intergálu podle <u>dolní meze</u> dostaneme $-f(x)$.

Příklad 104. Pro pokročilejší: Zkuste si rozmyslet, jak by vypadala derivace funkcí

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t}\, dt, \qquad G(x) = \int_{\sin x}^1 \arcsin t\, dt, \qquad H(x) = \int_x^{x^2} \ln t\, dt.$$

Řešení. Podle pravidla pro derivování složené funkce (Věta 11) je

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left(\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\, dt\right)' = \frac{1}{x^2}\cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x},\\
G'(x) &= \left(\int_{\sin x}^1 \arcsin t\, dt\right)' = -(\underbrace{\arcsin \sin x}_{=x})\,.\,(\sin x)' = -x\cos x,\\
H'(x) &= \left(\int_x^{x^2} \ln t\, dt\right)' = \left(\int_x^1 \ln t\, dt + \int_1^{x^2} \ln t\, dt\right)'\\
&= \left(\int_x^1 \ln t\, dt\right)' + \left(\int_1^{x^2} \ln t\, dt\right)' = -\ln x + (\ln x^2)\,.\,(x^2)'\\
&= -\ln x + 2\,(\ln x)\,.\,2x = (4x-1)\,\ln x.
\end{aligned}$$

□

3.8. **Metody výpočtu určitého integrálu.** To, že jsme schopni najít primitivní funkci pomocí určitého integrálu, vede k jednoduché metodě výpočtu určitého integrálu pomocí <u>libovolné</u> primitivní funkce k funkci $f(x)$.

Věta 37 (Newton-Leibnitzův vzorec). *Je-li $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a je-li $F(x)$ <u>libovolná</u> primitivní funkce k $f(x)$ na (a,b), přičemž $F(x)$ je spojitá na $[a,b]$, potom je*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}.$$

Důkaz. Všimněte si, že ve větě stačí $f(x)$ integrovatelná, nemusí být spojitá. Důkaz ale provedeme pouze pro spojitou funkci $f(x)$, obecnější důkaz lze najít v literatuře.

Je-li $f(x)$ spojitá na $[a,b]$, potom má $f(x)$ podle Věty 24 na $[a,b]$ primitivní funkci, označme ji $F(x)$. Dále, protože je podle Důsledku 8 funkce $\int_a^x f$ také primitivní k $f(x)$ na $[a,b]$, musí se tyto dvě primitivní funkce navzájem lišit o konstantu, viz Poznámka 19(iii). Tedy platí, že $F(x) = \int_a^x f + C$ pro každé $x \in [a,b]$, a proto je

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f + C\right) - \left(\int_a^a f + C\right) = \int_a^b f.$$

□

Výpočet určitého integrálu podle Newton-Leibnitzova vzorce značíme jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a). \tag{45}$$

Příklad 105. Protože je funkce $\frac{x^3}{3}$ primitivní k funkci x^2 na $[0,1]$, platí

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}},$$

viz také Příklad 96. □

Věta 38 (Metoda per-partes pro určitý integrál). *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $[a,b]$ a $u', v' \in \mathcal{R}[a,b]$. Potom platí*

$$\int_a^b u'(x)\,.\,v(x)\,dx = \big[u(x)\,.\,v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)\,.\,v'(x)\,dx.$$

Důkaz. Podle Věty 26 je funkce

$$F(x) := u(x)\,.\,v(x) - \int_a^x u\,.\,v'$$

primitivní k funkci $f(x) = \int u'(x)\,.\,v(x)\,dx$ na intervalu $[a,b]$. A proto podle Newton-Leibnitzova vzorce (45) je

$$\begin{aligned}\int_a^b u'\,.\,v &= F(b) - F(a) = \left(u(b)\,.\,v(b) - \int_a^b u\,.\,v'\right) - \left(u(a)\,.\,v(a) - \int_a^a u\,.\,v'\right)\\ &= \big[u\,.\,v\big]_a^b - \int_a^b u\,.\,v'.\end{aligned}$$

□

Pomocí Věty 38 lze tedy počítat daný integál metodou per-partes <u>přímo</u>. Druhá možnost je pak vypočítat nejprve primitivní funkci pomocí metody per-partes pro <u>neurčitý integrál</u> (Věta 26) a potom aplikovat Newton-Leibnitzův vzorec (45).

Příklad 106. (Srovnejte s Příkladem 87.)

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\,\cos x\,dx \quad &\left|\begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right| = \big[x\,\sin x\big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx\\ &= \underbrace{\pi\,\sin\pi}_{=0} - \underbrace{0\,\sin 0}_{=0} - \big[-\cos x\big]_0^\pi = \big[\cos x\big]_0^\pi = \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = \boxed{-2}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^e x\,\ln x\,dx \quad &\left|\begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right| = \left[\frac{x^2}{2}\,\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{e^2}{2}\underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}.\end{aligned}$$

$\square$

Věta 39 (Substituce pro určitý integrál). *Nechť je funkce $f(t)$ spojitá na intervalu $[c, d]$ a nechť má funkce $\varphi(x)$ integrovatelnou derivaci na intervalu $[a, b]$ a $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$. Potom platí*

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \,.\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt.$$

Neboli v daném integrálu volíme <u>substituci</u> $\boxed{t = \varphi(x)}$ a transformujeme nejen integrál, ale i meze (v tomtéž pořadí mezí).

Příklad 107. Vypočtěte

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Řešení. Tento příklad můžeme vyřešit dvěma způsoby. Buď přímo z Newton-Leibnitzova vzorce (45) (výpočtem primitivní funkce se substitucí v neurčitém intgrálu) nebo pomocí substituce v určitém integrálu.

1. způsob: Z Příkladu 90 víme, že

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

Potom je

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left(\frac{1}{2} \underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\, 1 \sqrt{1-1^2}\right) - \left(\frac{1}{2} \arcsin 0 + \frac{1}{2}\, 0 \sqrt{1-0^2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

2. způsob: Při substituci v určitém integrálu transformujeme i meze (a již se pak ke „staré“ proměnné x <u>nevracíme</u>), tj.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \quad \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = (\cos t)\, dt \\ x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \\ x = 1 \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \,.\, \underbrace{\cos t\, dt}_{dx}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} == \left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin \pi}{4}}_{=0}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Protože je jedná o obsah čtvrtkruhu s poloměrem $r = 1$, je výsledná hodnota $\frac{\pi}{4}$ očekávaná. $\square$

Příklad 108. Vypočtěte obsah kruhu s poloměrem $r > 0$.

Řešení. Obsah kruhu vypočítáme jako 2–krát obsah půlkruhu nebo jako 4–krát obsah čtvrtkruhu. Podle první možnosti je pak

$$P = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \quad \left| \begin{array}{l} x = r\sin t \\ dx = (r\cos t)\,dt \\ x = -r \ \Rightarrow\ t = -\frac{\pi}{2} \\ x = r \ \Rightarrow\ t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}}_{= r\cos t} \cdot \underbrace{r\cos t\,dt}_{dx}$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt = 2\,r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 2\,r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt$$

$$= 2\,r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,r^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin\pi}{4}}_{=0}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin(-\pi)}{4}}_{=0}\right) \right\}$$

$$= 2\,r^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\pi r^2}.$$

□

3.9. **Aplikace určitého integrálu.** Víme, že určitý integrál $\int_a^b f$ byl zkonstruován jako orientovaná plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $[a, b]$. Tato orientovaná plocha je zřejmě rovna skutečné ploše, pokud je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

• Plocha mezi dvěma grafy. Pokud nás zajímá velikost plochy mezi grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$, viz obr., určíme ji pomocí vepsaných a opsaných obdélníků (stejně jako při konstrukci Riemannova integrálu v odstavci 3.4), avšak nyní bude obsah každého takového obdélníka tvaru

$$[f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \text{Riemannův součet je pak} \quad \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1}).$$

Tyto úvahy vedou k odvozeni následujícího vzorce.

Tvrzení 6 (Plocha mezi grafy). *Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ a $f(x) \geq g(x)$ na $[a, b]$. Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu $[a, b]$ velikost*

$$\boxed{P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx} = \int_a^b [\text{ horní funkce } - \text{ dolní funkce }]\,dx.$$

V tomto případě je zřejmě vždy $P \geq 0$!

Příklad 109. Určete plochu mezi grafy funkcí $y = 1 - x^2$ a $y = -3$.

Řešení. Oba grafy se protínají v bodech $x = -2$ a $x = 2$, přičemž funkce $y = 1 - x^2$ je horní funkce na intervalu $[-2, 2]$ (viz obr.). A proto je hledaná plocha

$$P = \int_{-2}^{2} [(1 - x^2) - (-3)]\,dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}.$$

$\square$

Příklad 110. Určete plochu mezi grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$.

Řešení. Oba grafy se protínají v bodech $x = \pi$ a $x = 2\pi$, přičemž funkce $y = \sin x$ je horní funkce na tomto intervalu (viz obr.). A proto je hledaná plocha

$$\begin{aligned} P &= \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - 2\sin x)\, dx = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx = \big[\cos x\big]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \cos 2\pi - \cos\pi = 1 - (-1) = \boxed{2}. \end{aligned}$$

$\square$

• Délka křivky. Křivka C v rovině, $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, je zadána parametricky jako zobrazení $C:\ t \mapsto [x(t), y(t)]$.

Příklad 111. Křivka $C:\ t \mapsto [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$ je kružnice o poloměru $r = 1$ se středem v počátku (viz obr.). $\square$

Zvolme libovolné dělení $D = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta\}$ intervalu $[\alpha, \beta]$. Na křivce C vyznačíme body odpovídající hodnotám parametru $t = t_k$ (viz obr.).

Zvolme nyní nějaké dva dělící body t_{k-1} a t_k a označme příslušné body na křivce C jako $M = [x(t_{k-1}), y(t_{k-1})]$ a $N = [x(t_k), y(t_k)]$. Podle Pythagorovy věty má potom úsečka MN velikost

$$|MN| = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}.$$

Délka celé křivky je pak aproximována délkou lomené čáry při dělení D, tedy číslem

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big[x(t_k) - x(t_{k-1})\big]^2 + \big[y(t_k) - y(t_{k-1})\big]^2} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 (t_k - t_{k-1})^2 + \left[\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 + \left[\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2} \cdot (t_k - t_{k-1}) \\ &\quad = \text{ Riemannův součet s výškou „obdélníka“ danou výrazem} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left[\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2 + \left[\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right]^2}$$

Tedy pro $n \to \infty$ (zvyšující se počet dělících bodů a normu dělení $n(D) \to 0$) je

$$\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \to x'(t), \qquad \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \to y'(t), \qquad t_k - t_{k-1} \to dt,$$

a proto dostáváme následující vzorec.

Tvrzení 7 (Délka křivky v rovině). *Nechť C je křivka v rovině a $[x(t), y(t)]$ pro $t \in [\alpha, \beta]$ její parametrizace. Mají-li souřadné funkce $x(t)$ a $y(t)$ spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, potom má křivka C konečnou délku a platí*

$$\boxed{d(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt}.$$

Příklad 112. Určete délku jednotkové půlkružnice (tj. $r = 1$, viz obr.).

Řešení. Půlkružnice má parametrizaci $[x(t), y(t)] = [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0, \pi]$. Tyto funkce mají spojitou derivaci $[x'(t), y'(t)] = [-\sin t, \cos t]$ na $[0, \pi]$, a proto je délka půlkružnice rovna

$$d = \int_0^{\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\ dt = \int_0^{\pi} 1\ dt = \big[\, t \,\big]_0^{\pi} = \boxed{\pi}.$$

(Obvod celé jednotkové kružnice je pak zřejmě 2π.) □

Příklad 113. Určete obvod kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení. Kružnice má parametrizaci $[x(t), y(t)] = [r \cos t, r \sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$. Tyto funkce mají spojitou derivaci $[x'(t), y'(t)] = [-r \sin t, r \cos t]$ na $[0, 2\pi]$, a proto je obvod kružnice roven

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\ dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = \big[\, r\, t \,\big]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi r}. \end{aligned}$$

□

Graf funkce $f(x)$ můžeme chápat jako množinu bodů $[x, f(x)]$, tedy je to speciální případ křivky v rovině, která má parametrizaci $[t, f(t)]$ pro $t \in [a, b]$ (v tomto případě tuto parametrizaci ale píšeme s proměnnou x). A protože má tato parametrizace derivaci $[(t)', f'(t)] = [1, f'(t)]$, dostáváme z Tvrzení 7 následující vzorec.

Důsledek 9 (Délka grafu). *Má-li funkce $f(x)$ spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$, potom má její graf na intervalu $[a, b]$ konečnou délku a platí*

$$\boxed{d(\operatorname{Gr} f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx}.$$

Příklad 114. Určete délku grafu paraboly $f(x) = \frac{1}{2} x^2$ na intervalu $[0, 1]$.

Řešení. Délka grafu bude zřejmě číslo mezi $\sqrt{2}$ a 2 (viz obr.). Protože je $f'(x) = x$ spojitá funkce na intervalu $[0, 1]$, je délka tohoto grafu rovna

$$d(\operatorname{Gr} f) = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\ dx.$$

Ověřte si zpětným derivováním, že primitivní funkce k funkci $\sqrt{1 + x^2}$ je

$$F(x) = \frac{1}{2}\, x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

A proto je podle Newton-Leibnitzova vzorce (45)

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Gr}\, f) &= \left[\frac{1}{2}\, x\, \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\, \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\, 1\, \sqrt{2} + \frac{1}{2}\, \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \right) - \left(\frac{1}{2}\, 0\, \sqrt{1} + \frac{1}{2}\, \underbrace{\ln 1}_{=0} \right) \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\, \ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 1.59. \end{aligned}$$

□

• Objem rotačního tělesa. Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x kolem osy x na intervalu $[a, b]$ (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nabo nekladná).

Zvolíme-li nějaké dělení $D = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$, potom má jeden „objemový dílek“ šířku $x_k - x_{k-1}$ a poloměr $f(c_k)$ (viz obr.). Tedy objem takového dílu je

$$\pi\, [f(c_k)]^2\, (x_k - x_{k-1}) \qquad \text{(obsah „podstavy“ krát šířka).}$$

Objem celého rotačního tělesa je pak aproximován číslem

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\, [f(c_k)]^2\, (x_k - x_{k-1}) = \text{ Riemannův součet s výškou „obdélníka“ danou výrazem } \pi\, [f(c_k)]^2.$$

Tedy pro $n \to \infty$ (zvyšující se počet dělících bodů a normu dělení $n(D) \to 0$) dostáváme následující vzorec.

Tvrzení 8 (Objem rotačního tělesa). *Nechť $f(x)$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi $\mathrm{Gr}\, f$ a osou x na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je*

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}.$$

Příklad 115. Určete objem jednotkové koule.

Řešení. Objem určíme jako dvojnásobek objemu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0, 1]$. Je tedy

$$V = 2\,\pi \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (1-x^2)\, dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}\,\pi}.$$

□

Příklad 116. Určete objem koule o poloměru r.

Řešení. Objem určíme jako dvojnásobek objemu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0, r]$. Je tedy

$$V = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

□

Příklad 117. Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací řetězovky $f(x) = \cosh x$ kolem osy x na intervalu $[-1, 1]$.

Řešení. Funkce $\cosh x$ je zadána pomocí exponenciální funkce jako aritmetický průměr e^x a e^{-x}, tj.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 x\, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \left(e^{2x} + \underbrace{2e^x e^{-x}}_{=2} + e^{-2x} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{e^2}{2} + 2 + \frac{e^{-2}}{-2} \right) - \left(\frac{e^{-2}}{2} - 2 + \frac{e^2}{-2} \right) \right] \\ &= \boxed{\frac{\pi}{4} \left(e^2 - e^{-2} + 4 \right)} \approx 8.83865. \end{aligned}$$

Uvedený integrál lze spočítat i pomocí hyperbolických funkcí. Objem je pak

$$V = \pi\, [(\cosh 1)\, (\sinh 1) + 1] \approx 8.83865.$$

□

• Povrch (obsah pláště) rotačního tělesa. Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Zvolíme-li nějaké dělení $D = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$, potom má jeden dílek „šířku" (délka grafu)

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2}\, (x_k - x_{k-1}) \\ &\approx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \end{aligned}$$

a poloměr $f(c_k)$ (viz obr.). Tedy obsah pláště takového dílu je

$$2\pi\, f(c_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2}\, (x_k - x_{k-1}).$$

Objem celého rotačního tělesa je pak aproximován číslem

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi\, f(c_k)\, \sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}\, (x_k-x_{k-1})$$

$$= \text{ Riemannův součet s výškou „obdélníka“ danou výrazem}$$

$$2\pi\, f(c_k)\, \sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}.$$

Tedy pro $n \to \infty$ (zvyšující se počet dělících bodů a normu dělení $n(D) \to 0$) dostáváme následující vzorec.

Tvrzení 9 (Obsah pláště rotačního tělesa). *Nechť $f(x)$ je nezáporná funkce se spojitou derivací $f'(x)$ na intervalu $[a,b]$. Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky* $\mathrm{Gr}\, f$ *na intervalu $[a,b]$ kolem osy x, je*

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}.$$

Příklad 118. Určete povrch jednotkové koule.

Řešení. Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0,1]$. Protože platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},$$

je tedy

$$S = 2\,.\,2\,\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \sqrt{\frac{(1-x^2)+x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 1\, dx = 4\pi \left[\, x \,\right]_0^1 = \boxed{4\pi}.$$

□

Příklad 119. Určete povrch koule o poloměru r.

Řešení. Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0,r]$. Protože platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

je tedy

$$S = 2\,.\,2\,\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\, dx = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, \sqrt{\frac{(r^2-x^2)+x^2}{r^2-x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^r r\, dx = 4\pi \left[\, rx \,\right]_0^r = \boxed{4\pi r^2}.$$

□

Příklad 120. Určete obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací řetězovky $f(x) = \cosh x$ kolem osy x na intervalu $[-1, 1]$.

Řešení. Funkce $\cosh x$ je zadána v Příkladu 117. Protože platí

$$f'(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{a} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

je tedy

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh x \underbrace{\sqrt{1 + (\sinh x)^2}}_{= \cosh x} \, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 x \, dx$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2} \left(e^2 - e^{-2} + 4\right)} \approx 17.6773,$$

viz Příklad 117, kde jsme vypočítali integrál $\int_{-1}^{1} \cosh^2 x \, dx$.

K tomuto příkladu ještě poznamenejme, že řetězovka vytváří těleso s nejmenším pláštěm mezi všemi rotačními tělesy, jejichž „generující graf“ začíná a končí ve stejných bodech, jako uvedená řetězovka (viz obr.). To se využívá např. při konstrukci visutých mostů (souvisí to s minimalizací potenciální energie použitého materiálu). Více např. na

http://en.wikipedia.org/wiki/Catenary,
http://en.wikipedia.org/wiki/Catenoid,
http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Catenary_dir/catenary.html.

□

• Další aplikace určitého integrálu. Kromě geometrických aplikací (obsah plochy, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělěsa) se určitý integrál využívá v mnoha fyzikálních aplikacích, např.

– těžiště rovinného obrazce,

– těžiště tělesa,

– obsah plochy, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělěsa v polárních či parametrických souřadnicích.

Podrobnosti jsou např. ve skriptech prof. Slováka.

3.10. **Nevlastní integrály.** Stejně tak jako $\int_a^b f$ je plocha mezi grafem (ohraničené) funkce $f(x)$ a osou x na (konečném) intervalu $[a, b]$, můžeme chtít najít tuto plochu na neohraničeném intervalu $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$, případně i pro neohraničenou funkci $f(x)$. Dostáváme se tak k pojmu nevlastního integrálu

$$\int_a^{\infty} f, \qquad \int_{-\infty}^{b} f, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Přitom, jak uvidíme, všechna pravidla pro výpočet integrálu zůstávají zachována, jen je potřeba dávat pozor na neurčité výrazy (obsahující symbol ∞) a ty pak spočítat pomocí limity.

Příklad 121. Tyto příklady berte jako motivační.

(a) Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty)$ je (viz obr.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = -\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{\substack{\text{ve smyslu} \\ \text{limity}}} -(-1) = 0 + 1 = \boxed{1}.$$

(b) Plocha pod neohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, 1]$ je (viz obr.)

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_0^{1} = (-1) - \left(-\underbrace{\frac{1}{0^+}}_{\substack{\text{ve smyslu} \\ \text{limity}}} \right) = -1 + \infty = \boxed{\infty}.$$

(c) Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $[1, \infty)$ je (viz obr.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln x \right]_1^{\infty} = \underbrace{\ln \infty}_{\substack{\text{ve smyslu} \\ \text{limity}}} - \ln 1 = \infty - 0 = \boxed{\infty}.$$

□

Definice 22 (Nevlastní integrál 1. druhu).

- Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, \infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = L, \tag{46}$$

potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = L.$$

Pokud existuje limita v (46) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \pm\infty.$$

- Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $(-\infty, b]$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx = L, \tag{47}$$

potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = L.$$

Pokud existuje limita v (47) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \pm\infty.$$

□

Tedy příklady nevlastních integrálů v Příkladu 121 jsou spočítány matematicky správně, jen jsme pro zápis výpočtu měli zvolit symbol limity. Tento symbol limity budeme uvádět, jen až je to nezbytně nutné.

Příklad 122. Viz Příklad 121.

(a)
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \left(-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) - (-1) = 0 + 1 = \boxed{1}.$$

(c)
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_1^{\infty} = \big(\lim_{x\to\infty} \ln x\big) - \ln 1 = \boxed{\infty}.$$

□

Příklad 123. Vypočtěte nevlastní integrál pro jeden z typů parciálních zlomků (viz odstavec 1.6)
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, \qquad a \neq 0.$$

Řešení. Podle věty o substituci v určitém integrálu je
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx \quad \left|\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x = 0 \ \Rightarrow t = 0 \\ x = \infty \ \Rightarrow \ t = \infty \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{(t+a^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t+a^2}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left(-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+a^2}\right)}_{=0} - \left(-\frac{1}{a^2}\right)\right\} = \boxed{\frac{1}{2a^2}}.$$

□

Poznámka 30. Někdy lze podobným způsobem vypočítat i nevlastní inetrgál přes (oboustranně) nekonečný interval $(-\infty, \infty)$,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$
i když definice takového integrálu zahrnuje limitu funkce dvou proměnných
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{[a,b]\to[-\infty,\infty]} \int_a^b f(x)\,dx,$$
kterou jsme v tomto semestru neprobírali (viz MB103).

Tomuto problému se lze ale vyhnout za použití pravidla návaznosti (Věta 32(vii)), neboť platí
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx,$$
kde $a \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené číslo (např. $a = 0$) a kde jsou zmíněné integrály nevlastní a 1. druhu. □

Příklad 124. V pravděpodobnosti a statistice (viz asi MB104) se často používá nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1,$$

přičemž uvedená funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

se nazývá hustota pravděpodobnosti (standardního) normálního rozdělení (viz obr.). Protože je tato funkce $f(x)$ sudá, zřejmě je pak

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \approx 1.2533.$$

Současně si uvědomte, že primitivní funkce k této funkci $f(x)$ je vyšší funkce (tedy nelze ji vypočítat pomocí elementárních funkcí, viz Poznámka 23). □

Podobně jako v Definici 22 můžeme postupovat i pro funkci $f(x)$, která je neohraničená v okolí bodu a nebo b.

Definice 23 (Nevlastní integrál 2. druhu).

- Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx = L, \tag{48}$$

potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = L.$$

Pokud existuje limita v (48) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = \pm\infty.$$

- Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, b)$. Existuje-li vlastní (levostranná) limita

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_{a}^{\beta} f(x)\, dx = L, \tag{49}$$

potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = L.$$

Pokud existuje limita v (49) jako nevlastní (tj. $L = \pm\infty$), potom říkáme, že tento nevlastní integrál diverguje a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = \pm\infty.$$

□

Opět budeme symbol limity budeme uvádět, jen až je to nezbytně nutné.

Příklad 125. Viz Příklad 121(b).

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = (-1) - \Big(-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}_{=\infty}\Big) = \boxed{\infty}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_0^1 = \ln 1 - \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\ln x}_{-\infty} = \boxed{\infty}.$$

□

Příklad 126. Určete plochu pod mezi grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1,1)$.

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je na intervalu $(-1,1)$ neohraničená a sudá (viz obr.). Plochu vypočítáme jako dvojnásobek plochy na intervalu $[0,1)$ (nevlastní integrál 2. druhu):

$$P = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\,\big[\arcsin x\big]_0^1 = 2\Big(\underbrace{\big(\lim_{x\to 1^-}\arcsin x\big)}_{=\arcsin 1} - \arcsin 0\Big)$$

$$= 2\,(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boxed{\pi}.$$

Všimněte si, že v tomto případě vlastně limita ve výpočtu ani není potřeba, protože je primitivní funkce $F(x) = \arcsin x$ k funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ spojitá v bodě $x = 1$ (viz Věta 37). Tedy tento konkrétní příklad lze spočítat i přímo jako

$$P = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \big[\arcsin x\big]_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}. \qquad (50)$$

Všimněte si také, že je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 + \big[\big(\sqrt{1-x^2}\big)'\big]^2},$$

a tedy výpočet uvedený v (50) je shodný s výpočtem délky jenotkové půlkružnice (srovnejte s Příkladem 112). □

Konec 8. přednášky (16.4.2007)

Pro výpočet nevlastních integrálů tedy budeme používat stejné metody jako pro výpočet (klasických) určitých integrálů (např. metodu per-partes, viz Věta 38).

Příklad 127. V teorii pravděpodobnosti a statistiky (viz asi MB104) se používá funkce

$$f(x) := \lambda\, e^{-\lambda x}, \qquad \text{pro } x \in (0,\infty),$$

která udává hustotu tzv. exponenciálního rozdělení, kde $\lambda > 0$ je pevně zvolený parametr. Potom můžeme spočítat

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \big[-e^{-\lambda x}\big]_0^\infty = \big(-\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x}\big) - (-e^0) = \Big(-\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}}_{=0}\Big) - (-1) = \boxed{1},$$

a také

$$\int_0^\infty x\,f(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda\,x\,e^{-\lambda x}\,dx \qquad \left|\begin{array}{ll} u' = \lambda\,e^{-\lambda x} & u = -e^{-\lambda x} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right|$$

$$= \big[-x\,e^{-\lambda x}\big]_0^\infty - \int_0^\infty \big(-e^{-\lambda x}\big)\,dx = \left(-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}\right) - (-0\,e^0) + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\overset{\text{l'Hosp.}}{=} \Bigg(\underbrace{-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda\,e^{\lambda x}}}_{=0}\Bigg) + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \Bigg(\underbrace{-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda\,e^{\lambda x}}}_{=0}\Bigg) - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \boxed{\frac{1}{\lambda}}.$$

Např. volbou parametru $\lambda = 1$ dostáváme, že plocha pod funkcí $x\,e^{-x}$ na intervalu $(0, \infty)$ je rovna (viz obr.)

$$\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx = \boxed{1}.$$

□

4. Nekonečné řady

V této kapitole se budeme věnovat součtům nekonečně mnoha sčítanců – buď čísel nebo mocnin. Jako motivace nám může sloužit geometrická řada, kterou jistě znáte ze střední školy, případně Taylorův polynom funkce $f(x)$ pro libovolně velká n (viz odstavec 2.19 a zejména Poznámka 18). To následně vede k vyjádření (tedy i obráceně, k možné definici) všech elementárních funkcí pomocí polynomů „nekonečného stupně", tedy pomocí nekonečných mocninných řad.

4.1. **Nekonečné číselné řady.** V tomto odstavci budeme pracovat s posloupností reálných čísel

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \text{případně s} \quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Definice 24 (Nekonečná řada). Součet tvaru

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

nazýváme nekonečnou (číselnou) řadou. Číslo a_n se nazývá n–tý člen.

Číslo

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

se nazývá n–tý částečný součet této nekonečné řady. □

Poznámka 31. Všimněte si, že v Definici 24 je n–tý člen a_n v podstatě $(n+1)$–ní v pořadí, protože posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ začínáme indexovat od $n = 0$. V literatuře je možné nalézt i indexování od $n = 1$, ale zde (a ve skriptech prof. Slováka) budeme indexovat od $n = 0$. □

Nejprve si jako motivaci zopakujme úvahy o geometrické řadě.

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla. Tedy je to nekonečná řada, kde $a_n := aq^n$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Číslo q se nazývá kvocient geometrické řady, přičemž q může být kladné či záporné (viz Příklad 128). Posloupnost částečných součtů pro geometrickou řadu odvodíme snadno:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n, \qquad \Rightarrow \qquad qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + aq^{n+1}.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$s_n - qs_n = a - aq^{n+1}, \qquad \Rightarrow \qquad s_n\,(1-q) = a\,(1-q^{n+1}).$$

Je-li $q = 1$, potom je zřejmě $\boxed{s_n = (n+1)\,a}$.

Je-li $q \neq 1$, potom je

$$\boxed{s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}, \qquad q \neq 1. \tag{51}$$

Příklad 128. Určete posloupnost částečných součtů dané geometrické řady:

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n} + \dots.$$

Řešení.
(a) Protože je $a = 1$ a $q = \frac{1}{2}$ je podle vzorce (51) (nebo odvozeno přímo pro tuto konkrétní řadu)

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \boxed{2 - \frac{1}{2^n}}.$$

(b) Protože je $a = 1$ a $q = -\frac{1}{3}$ je podle vzorce (51) (nebo odvozeno přímo pro tuto konkrétní řadu)

$$s_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^n} = \boxed{\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4\,.\,3^n}}.$$

□

Chování posloupnosti částečných součtů, přesněji limita této posloupnosti, zřejmě určuje chování celé nekonečné řady.

Definice 25 (Konvergence, divergence, oscilace nekonečné řady). Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k číslu s, nebo také že má součet s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Existuje-li nevlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k $\pm\infty$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Pokud limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ osciluje. □

Příklad 129.

- Geometrická řada s $a = 0$ (a $q \in \mathbb{R}$ libovolným) zřejmě konverguje (k 0), protože v tomto případě je $s_n = 0$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = 1$ zřejmě diverguje (k $\pm\infty$ podle znaménka čísla a), protože v tomto případě je $s_n = (n + 1)\,a$.
- Geometrická řada s $a \neq 0$ a $q = -1$ zřejmě osciluje, protože je v tomto případě $s_n = \{a, 0, a, 0, a, 0, \dots\}$ a limita této posloupnosti neexistuje.

□

Příklad 130. Rozhodněte o konvergenci a případně určete součet dané geometrické řady

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}.$$

Řešení. (a) Protože je $s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ (viz Příklad 128(a)), je

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\Big(2 - \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}\Big) = \boxed{2},$$

tj. uvedená $\boxed{\text{řada konverguje}}$. Konvergenci této řady lze také ukázat názorně na obrázku.

(b) Protože je $s_n = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4\,.\,3^n}$ (viz Příklad 128(b)), je

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{3}{4} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{4\,.\,3^n}}_{\to 0}\Big) = \boxed{\frac{3}{4}},$$

tj. uvedená $\boxed{\text{řada konverguje}}$. □

V Příkladu 129 jsme vyšetřili geometrickou řadu s $|q| = 1$. Ve vzorci (51) pro n–tý částečný součet geometrické řady se vyskytuje posloupnost q^{n+1}, která zřejmě konverguje k 0 pro $|q| < 1$, konverguje k ∞ pro $q > 1$, a nemá limitu pro $q < -1$. Odsud tedy plyne jednoduchá podmínka pro konvergenci geometrické řady.

Tvrzení 10 (Konvergence a součet geometrické řady). *Nechť $a \neq 0$. Potom geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ konverguje $\quad\Leftrightarrow\quad |q| < 1$. V tomto případě (a také v případě $a = 0$) je pak její součet*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}}, \qquad |q| < 1.$$

Příklad 131. V Příkladech 128 a 130 je

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

□

Příklad 132. Z výšky $a = 2$ metry nad rovným povrchem pustíme kouli. Pokaždé, když koule dopadne na povrch z výšky h, odrazí se do výšky $qh = \frac{h}{3}$ (tedy $q = \frac{1}{3}$). Určete celkovou vzdálenost, kterou koule urazí při nekonečně mnoha takových doskocích.

Řešení. Celková vzdálenost je (viz obr.)

$$s = 2 + 2\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{2}{27} + \cdots = 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Jedná se tedy o geometrickou řadu, kde $a = \frac{4}{3}$ a $q = \frac{1}{3}$. Podle Tvrzení 10 je tedy

$$s = 2 + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \boxed{4 \text{ metry}}.$$

Přepočítejte si tento příklad s obecnými parametry $a > 0$ a $q \in (0, 1)$.

[Řešení je pak $s = a\,\frac{1+q}{1-q}$.] $\square$

Někdy se při výpočtu n–tého částečného součtu s_n mnoho výrazů „pokrátí“.

Příklad 133. Rozhodněte o konvergenci a případně určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{4\,.\,5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}.$$

Řešení. Protože platí (viz rozklad na parciální zlomky v odstavci 1.6)

$$\frac{1}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

je n–tý částečný součet roven

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{4\,.\,5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+2} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} \to 1.
\end{aligned}$$

A proto uvedená nekonečná řada $\boxed{\text{konverguje}}$ a její součet je

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1}.$$

$\square$

Jestliže má daná nekonečná řada konvergovat, musí se zřejmě její členy postupně <u>zmenšovat</u> (v absolutní hodnotě) k nule, jinak by posloupnost částečných součtů nemohla konvergovat ke konečnému číslu. Platí tedy následující.

Věta 40 (Nutná podmínka konvergence řady). *Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom nutně platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{52}$$

To znamená, že pokud $\lim_{n\to\infty} a_n$ je různá od nuly nebo pokud tato limita neexistuje, potom nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ <u>nekonverguje</u>.

Příklad 134.

(a) Nekonečná řada

$$1+2+3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} n$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty} n=\infty\neq 0$. Zřejmě tato řada diverguje k ∞.

(b) Nekonečná řada

$$-1+2-3+4-5+6-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$ neexistuje (a jedná se o neohraničenou posloupnost). Zřejmě tato řada osciluje.

(c) Nekonečná řada

$$1-1+1-1+1-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje (a jedná se o ohraničenou posloupnost). Zřejmě tato řada osciluje. Tato řada je geometrická s $q=-1$ a $a=1$, viz Příklad 129.

(d) Nekonečná řada

$$-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{3}{7}-\frac{4}{9}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n}{2n+1}$$

nekonverguje, protože $\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+1}=-\frac{1}{2}\neq 0$. Zřejmě tato řada diverguje k $-\infty$.

$\square$

Podmínka (52) je obecně pouze podmínkou nutnou pro konvergenci nekonečné řady. Existují tedy nekonečné řady, které nekonvergují, ale podmínku (52) splňují.

Příklad 135.

(a) Nekonečná řada

$$\underbrace{1}_{1\text{ člen}}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{2\text{ členy}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{4\text{ členy}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^n\text{ členů}}+\ldots$$

nekonverguje, prestože $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Zřejmě tato řada diverguje k ∞.

(b) Jak ukážeme později (viz Příklad 139), tzv. harmonická řada

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

nekonverguje, prestože $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. V Příkladu 139 ukážeme, že tato řada diverguje k ∞.

$\square$

Pro konvergentní (a částečně i divergentní) nekonečné řady platí následující algebraická pravidla.

Věta 41 (Pravidla pro nekonečné řady). *Nechť nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují a nechť platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n=A,\qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n=B.$$

(i) *Pravidlo konstantního násobku: pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c \,.\, a_n$ konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \,.\, a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \,.\, A.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu: nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A \pm B.$$

Příklad 136. Určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n}.$$

Řešení. Podle Věty 41(ii) je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n},$$

neboť obě uvedené nekonečné řady konvergují. Jsou to totiž geometrické řady s $a = 1$ a s $q = \frac{1}{2}$, resp. s $q = \frac{1}{6}$, viz Tvrzení 10. Je tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{6^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = 2 - \frac{6}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

□

Poznámka 32. Pokud některá z řad diverguje k $\pm\infty$, chová se součtová/rozdílová řada podle pravidel pro „počítání s nekonečny“, jako např.

$$\infty + \infty = \infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty, \qquad \pm\infty \pm B = \pm\infty, \qquad A \pm \infty = \pm\infty, \qquad \ldots.$$

Např. tedy jestliže řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergují obě k ∞ nebo obě k $-\infty$, potom nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ také diverguje k $\pm\infty$.

Samozřejmě, výrazy typu $\infty - \infty$ či $-\infty + \infty$ jsou <u>neurčité</u> a tímto způsobem je vyčíslit nelze. □

Ve Větě 41 se nic neříká o součinu (a podílu) nekonečných řad. Tato problematika je mnohem složitější, než se na první pohled zdá, a kolem součinu řad existuje celá teorie (protože existují různé součiny nekonečných řad). Uvědomte si totiž, že při násobení mnohočlenů platí

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \,.\, (b_0 + b_1 + \cdots + b_n)& \\ = a_0 b_0 + a_0 b_1 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + a_n b_n&,\end{aligned}$$

tedy dostáváme nejen „diagonální součiny“ $a_i b_i$, ale také všechny „smíšené součiny“ $a_i b_j$. A pro součin takovýchto nekonečných mnohočlenů (tedy pro součin nekonečných řad) bude situace ještě mnohem složitější, protože bude záležet na tom, jakým způsobem výsledný součet jednotlivých součinů uspořádáme (srovnejte s Příklady 152 a 153 uvedenými dále).

4.2. **Nekonečné řady s nezápornými členy.** Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s nezápornými členy je její posloupnost částečných součtů neklesající, tj.

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n, \quad s_{n+1} = a_0 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_n \leq s_{n+1}}$$

(jednoduše proto, že do s_{n+1} přidáváme nezápornou hodnotu). A pokud je tedy neklesající posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ shora ohraničená, musí mít limitu (rovnu svému supremu). Tedy každá nekonečná řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k ∞ (tj. nemůže divergovat k $-\infty$ ani oscilovat).

Věta 42 (Srovnávací kritérium). *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti nezáporných čísel, pro které platí*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{pro všechna } n = N, N+1, N+2, \ldots \tag{53}$$

pro nějaké $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(i) *Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, potom také konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

(ii) *Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞, potom také řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverguje k ∞.*

Nerovnost (53) nemusí nutně platit pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Uvedený předpoklad říká, že musí být splněna od „jistého indexu počínaje“. Pro použití srovnávacího kritéria je zřejmě potřeba mít „v zásobě“ nějaký soubor nekonečných řad, o kterých víme, že jsou konvergentní/divergentní.

Příklad 137. Nekonečná řada

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

konverguje podle Věty 42(i) (ve které můžeme vzít $N = 0$), protože všechny její členy lze shora omezit příslušnými členy konvergentní řady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Pro součet uvedé řady pak zřejmě platí odhad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

□

Příklad 138. Nekonečná řada

$$\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

diverguje k ∞ podle Věty 42(ii) (ve které můžeme vzít $N = 2$), protože její členy lze zdola omezit příslušnými členy (divergentní) harmonické řady, tj. platí

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \qquad \text{pro všechna } n \geq 2.$$

□

Dále uvedeme tři nejznámější kritéria (Věty 43, 44 a 45) pro konvergenci/divergenci nekonečných řad s nezápornými či kladnými členy.

Věta 43 (Integrální kritérium). *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s nezápornými členy. Nechť* $f(x)$ *je funkce definovaná na intervalu* $[N,\infty)$ *pro nějaké* $N \in [0,\infty)$, *která je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí*

$$f(n) = a_n \qquad \textit{pro všechna } n \geq N.$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,dx \quad \textit{konverguje},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \textit{diverguje k } \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,dx = \infty.$$

V integrálním kritériu se používá nevlastní integrál 1. druhu, viz Definice 22.

Příklad 139. Harmonická řada (viz Příklad 135(b))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k ∞ podle Věty 43, protože pro funkce $f(x) := \frac{1}{x}$ je na intervalu $[1,\infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n}$ pro $n \geq 1$, přičemž je nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

viz Příklad 122(c), resp. Příklad 121(c). □

Příklad 140. Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konverguje či diverguje.

Řešení.

- Pro $p < 0$ je jedná o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^q$, kde $q := -p > 0$. Tato řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence (52), a proto nekonverguje. Protože se jedná o řadu s nezápornými členy, tak tato řada diverguje k ∞.

- Pro $p = 0$ se jedná o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, která zřejmě diverguje k ∞.

- Pro $p > 0$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^p}$ na intervalu $[1,\infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n^p}$ pro $n \geq 1$. Vyšetříme konvergenci nevlastního integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

  – Pro $p = 1$ je jedná o harmonickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje k ∞ (viz Příklad 139).

– Pro $p \neq 1$ máme
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^\infty x^{-p}\,dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^\infty = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\right) - \frac{1}{1-p}.$$
Uvedená limita závisí na tom, zda je exponent $1-p$ kladný nebo záporný, protože
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \infty, & \text{pro } 1-p>0,\\ 0, & \text{pro } 1-p<0. \end{cases}$$
A proto je
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \infty, & \text{pro } p<1, \text{ tj. tento nevlastní integrál diverguje k } \infty,\\ \frac{1}{p-1}, & \text{pro } p>1, \text{ tj. tento nevlastní integrál konverguje.} \end{cases}$$
Podle integrálního kritéria (Věta 43 s $N=1$) tedy platí, že pro $p>1$ řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ diverguje k ∞ a pro $p \in (0,1)$ tato řada konverguje.

Celkově jsme tedy ukázali, že řada
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \quad \boxed{\text{diverguje k } \infty \text{ pro } p \leq 1 \text{ a konverguje pro } p>1}.$$
□

Příklad 141. Zejména tedy konverguje řada
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2},$$
protože v Příkladu 140 vezmeme $p=2$.

Součet této řady určíme v Příkladu 172.

Dále, protože je $\frac{1}{n\,(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 42(i)) také konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\,(n+1)}$, viz Příklad 133. □

Věta 44 (Podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=0}^\infty a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$
Potom

(i) *tato řada konverguje, pokud je $q<1$,*

(ii) *tato řada diverguje k ∞, pokud je $q>1$ nebo $q=\infty$,*

(iii) *tento test nelze rozhodnout, pokud je $q=1$.*

V podílovém kritériu se tedy vyskytuje podíl dvou po sobě jdoucích členů nekonečné řady. A je zřejmě jedno, jestli je řada indexována od $n=0$ nebo od $n=1$ (nebo případně od jiného indexu).

Příklad 142.

(a) Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\,.\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,.\,n!} = \frac{(n+1)\,.\,n!\,.\,n^n}{(n+1)^n\,.\,(n+1)\,.\,n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \boxed{\frac{1}{e} < 1},$$

přičemž ve výpočtu jsme použili limitu definující Eulerovo číslo e (viz Příklad 16). Uvedená řada tedy konverguje podle podílového kritéria (Věta 44(i)).

(b) Pro geometrickou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, kde $a > 0$ a $q > 0$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{aq^{n+1}}{aq^n} = q \to q,$$

a proto podle podílového kritéria (Věta 44) geometrická řada s kladnými členy konverguje pro $q < 1$ a diverguje k ∞ pro $q > 1$. Viz také Tvrzení 10.

□

Příklad 143. Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

platí (viz výpočet v Příkladu 142(a))

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \boxed{e > 1},$$

a proto uvedená řada diverguje k ∞ podle podílového kritéria (Věta 44(ii)). □

Příklad 144. Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots, \quad \text{tj.} \quad a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{pro } n \text{ sudé}, \end{cases}$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}\,.\,n} = \frac{1}{2n}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{(n+1)\,.\,2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Odtud je vidět, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje, a proto podílové kritérium vůbec nelze použít.

Všimněte si, že lze psát

$$a_n = \frac{[(n+1) \bmod 2] + (n \bmod 2)\,.\,n}{2^n},$$

kde funkce $x \bmod 2$ dává zbytek po dělení čísla x číslem 2 (tedy jedničku, pokud je x liché, a nulu, pokud je x sudé). □

Věta 45 (Odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s nezápornými členy pro všechna $n \geq N$ pro nějaké $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Potom

(i) *tato řada konverguje, pokud je $q < 1$,*

(ii) *tato řada diverguje k ∞, pokud je $q > 1$ nebo $q = \infty$,*

(iii) *tento test nelze rozhodnout, pokud je $q = 1$.*

Příklad 145. Pro nekonečnou řadu v Příkladu 144 platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Tedy platí nerovnosti

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Limita na pravé straně se spočte přes exponenciální funkci a l'Hospitalovo pravidlo (Věta 15):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} \overset{\text{Věta 5(ii)}}{=} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} \;\left|\; \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \;\right| \overset{\text{l'Hosp.}}{=} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1. \tag{54}$$

Z věty o třech limitách (Věta 4) potom plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \boxed{\frac{1}{2} < 1}.$$

Proto podle odmocninového kritéria (Věta 45(i)) uvedená řada konverguje. □

Poznámka 33. V Příkladech 144 a 145 jsme viděli, že někdy podílové kritérium k výsledku nevede zatímco odmocninové kritérium ano (pro nekonečnou řadu s kladnými členy). To platí i obecně, neboť pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kladných čísel platí nerovnosti

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

To znamená, že pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, potom také existuje limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a tyto dvě limity jsou si rovny.

Tedy pokud je podílové kritérium nerozhodnutelné (tj. platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$), potom je také odmocninové kritérium nerozhodnutelné (tj. platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$). Říkáme, že odmocninové kritérium je silnější, než podílové kritérium (každý příklad, který lze spočítat podílovým kritériem, lze spočítat i odmocninovým kritériem, ale ne naopak). □

Příklad 146. Pro nekonečnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}=\frac{2}{1^2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{2^4}{4^2}+\frac{2^5}{5^2}+\dots$$
platí
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}=\frac{2}{\sqrt[n]{n^2}}=\frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\overset{(9)}{\longrightarrow}\frac{2}{1^2}=\boxed{2>1},$$
a proto podle odmocninového kritéria (Věta 45(ii)) uvedená řada diverguje k ∞.

Všimněte si také, že uvedená řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence (52), neboť je
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}\;\Bigg|\text{ typ }\frac{\infty}{\infty}\Bigg|\overset{\text{l'Hosp.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\,.\,\ln 2}{2n}\;\Bigg|\text{ typ }\frac{\infty}{\infty}\Bigg|\overset{\text{l'Hosp.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\,.\,(\ln 2)^2}{2}=\infty\neq 0.$$
Tedy uvedená řada podle Věty 40 nekonverguje. Protože se ale jedná o řadu s kladnými členy, musí tato řada potom divergovat k ∞. □

Příklad 147. Všimněte si, že podílové ani odmocninové kritérium nelze použít pro vyšetření konvergence/divergence nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (viz Příklad 140), protože pro podílové kritérium je
$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\overset{\text{Věta 5(ii)}}{=}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^p=1^p=1,$$
a pro odmocninové kritérium je
$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\overset{\text{Věta 5(ii)}}{=}\left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}\right)^p=\frac{1}{1^p}=1.$$
Zde jsme opět použili limitu $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, viz (54). □

4.3. **Alternující řady.** Pro srovnání a úplnost uveďme ještě kritérium konvergence pro nekonečné řady, jejichž členy mění znaménka.

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. Potom se nekonečná řada
$$a_0-a_1+a_2-a_3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,a_n,\qquad\text{případně}\qquad -a_0+a_1-a_2+a_3-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n,$$
nazývá alternující řada.

Příklad 148.

(a) Nekonečná řada
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n+1}$$
je alternující a nazývá se alternující harmonická řada nebo též Leibnitzova řada.

(b) Každá geometrická řada, ve které je $a\neq 0$ a $q<0$, je zřejmě alternující.

□

Z Věty 40 víme, že každá konvergentní řada, a tedy i každá alternující konvergentní řada, musí splňovat podmínku (52). Pro alternující řady můžeme ale říct mnohem více. Z podmínky (52) se nyní stává nutná a postačující podmínka pro konvergenci alternující řady.

Věta 46 (Leibnitzovo kritérium konvergence alternující řady). *Jestliže je $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel, potom nekonečná alternující řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \textit{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \textit{platí (52), tj.} \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0.$$

Důkaz. Vzhledem k Větě 40 stačí ukázat směr „$\Leftarrow$“. Protože je posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nerostoucí, plyne odsud konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, viz obr. $\square$

Příklad 149. Alternující harmonická řada (viz Příklad 148(a))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

konverguje podle Věty 46, protože je její „generující“ posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ kladná a klesající (tudíž nerostoucí) a splňuje

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

V Příkladu 163 pak ukážeme, jaký je součet této nekonečné řady. $\square$

`Konec 9. přednášky (23.4.2007)`

Pokud tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje předpoklady Věty 46 a řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = A$, potom číslo A nutně leží vždy mezi dvěma po sobě následujícími částečnými součty s_n a s_{n+1}. A tedy se číslo A nemůže lišit od s_n o více, než kolik je člen a_{n+1}. Tj. musí platit odhad

$$|A - s_n| < a_{n+1}. \tag{55}$$

Ukázali jsme tedy následující užitečné tvrzení o odhadu chyby částečných součtů s_n pro alternující řadu.

Tvrzení 11 (Odhad chyby alternující řady). *Předpokládejme, že alternující řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ (konvergující k číslu A) splňuje podmínky ve Větě 46. Potom pro všechna $n \geq N$ platí, že n–tý částečný součet*

$$s_n := a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$$

platí odhad (55), tj. s_n aproximuje součet A této řady s chybou menší, než je absolutní hodnota prvního (do s_n) nezahrnutého člene $(-1)^{n+1} a_{n+1}$. Navíc, zbytek $A - s_n$ má stejné znaménko jako tento první (do s_n) nezahrnutý člen $(-1)^{n+1} a_{n+1}$.

Příklad 150. Pokusme se ilustrovat Tvrzení 11 na alternující řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=\underbrace{1}_{a_0}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\underbrace{\frac{1}{128}}_{a_7}\quad\Big|\quad+\underbrace{\frac{1}{256}}_{a_8}-\dots,$$

jejíž součet známe. Protože se jedná o geometrickou řadu s $a=1$ a $q=-\frac{1}{2}$, je součet této řady roven číslu (viz Tvrzení 10)

$$A=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\approx 0.6666667.$$

Potom Tvrzení 11 říká, že pokud tuto řadu „ukončíme" po osmém členu (tj. $n=7$), potom konečný součet

$$s_7:=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}=\frac{85}{128}=0.6640625$$

aproximuje číslo A s chybou menší než je $a_8=\frac{1}{256}=0.00390625$. Skutečně,

$$|A-s_7|=\left|\frac{2}{3}-\frac{85}{128}\right|=\left|\frac{1}{384}\right|\approx 0.00260417<0.00390625=a_8.$$

Přitom má rozdíl $A-s_7=\frac{1}{384}$ stejné znaménko jako člen $(-1)^8\,a_8=\frac{1}{256}$, tedy je kladný. □

4.4. **Absolutně a relativně konvergentní řady.** Nejprve si všimněme, že pokud konverguje řada absolutních hodnot, potom konverguje původní řada.

Věta 47. *Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, potom konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$.*

Důkaz. Zřejmě pro každé n platí nerovnosti

$$-|a_n|\le a_n\le |a_n|,\qquad\Rightarrow\qquad 0\le a_n+|a_n|\le 2\,|a_n|.$$

Tedy pokud $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty}2\,|a_n|$ (podle pravidla konstantního násobku, viz Věta 41(i)). A dále, podle srovnávacího kritéria (Věta 42(i)), konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty}\big(a_n+|a_n|\big)$. A protože platí rovnost

$$a_n=\big(a_n+|a_n|\big)-|a_n|,\qquad\Rightarrow\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\big(a_n+|a_n|\big)}_{\text{konverguje}}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|}_{\text{konverguje}},$$

dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ jako rozdíl dvou konvergentních řad. Tedy tato řada také konverguje podle pravidla rozdílu, viz Věta 41(ii). □

Poznámka 34. Opačná implikace ve Větě 47 zřejmě neplatí, protože např. alternující harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\qquad\text{konverguje (viz Příklad 149),}$$

ale příslušná řada absolutních hodnot je harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\qquad\text{která diverguje k }\infty\text{ (viz Příklad 139).}$$

□

Má tedy smysl zavést následující definici.

Definice 26 (Absolutní a relativní konvergence). Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně (je absolutně konvergentní), pokud konverguje příslušná řada absolutních hodnot, tj. pokud konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně, potom říkáme, že tato řada konverguje relativně (je relativně konvergentní).

(Pro termín relativní konvergence lze v literatuře lze najít i jiné názvy, např. konverguje neabsolutně či podmíněně). □

Příklad 151.

(a) Alternující harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \qquad \text{konverguje relativně (viz Poznámka 34).}$$

(b) Nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots \qquad \text{konverguje absolutně,}$$

protože příslušná řada absolutních hodnot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \qquad \text{konverguje (viz Příklad 140, kde } p = 2\text{).}$$

□

Rozdíl mezi absolutně a relativně konvergentní řadou je zejména v tom, že členy absolutně konvergentní řady můžeme libovolně přeskládávat a nejenže dostaneme opět konvergentní řadu, ale tato nová přeskládaná řada bude mít stejný součet jako řada původní.

Naproti tomu členy relativně konvergentní řady nelze přeskládávat vůbec. Lze totiž jednoduše ukázat, že různým přeskládáním téže relativně konvergentní řady lze vytvořit řadu divergující k $\pm\infty$, konvergující k libovolně předem zvolenému reálnému číslu, či řadu oscilující. To vyplývá z toho, že v relativně konvergentní řadě musí být součet všech kladných členů ∞ a součet všech záporných členů $-\infty$, a při tom musí členy samotné konvergovat k nule (protože pro konvergentní řadu musí být splněna nutná podmínka konvergence, viz Věta 40).

Příklad 152. Uveďme jako příklad relativně konvergentní alternující harmonickou řadu (viz Příklad 151(a))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots . \tag{56}$$

Nejprve si všimněte, že součet všech kladných členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \infty,$$

která skutečně diverguje k ∞ (např. podle integrálního kritéria, viz Věta 43).

A dále součet všech <u>záporných</u> členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\cdots=-\infty,$$

která skutečně diverguje k $-\infty$ (např. podle integrálního kritéria, viz Věta 43).

Potom vhodným přeskládáním členů alternující harmonické řady (56) lze získat nekonečnou řadu, která

(a) <u>diverguje k ∞</u>:

- Vezměme nejprve jeden kladný člen, tj. „součet“ je roven $1\,\boxed{\geq 1}$.
- Přidejme nyní jeden záporný člen a tolik kladných členů, aby byl součet $\boxed{\geq 2}$, tj. součet je pak
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{41}\approx 2.004063454\geq 2.$$
(K tomu je zapotřebí k té 1 přidat 20 kladných členů.)
- Potom přidejme další (druhý) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet $\boxed{\geq 3}$.
- Potom přidejme další (třetí) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet $\boxed{\geq 4}$.
- Potom přidejme další (čtvrtý) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet $\boxed{\geq 5}$.
- ...

Uvědomte si, že kladných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici, protože součet těchto kladných členů je roven ∞.

Tímto způsobem po nekonečně mnoha krocích vyčerpáme všechny kladné i všechny záporné členy, tedy původní řadu vlastně „přerovnáme“, příčemž výsledný součet evidentně roste nade všechny meze. Tedy tato přerovnaná řada diverguje k ∞.

(b) <u>diverguje k $-\infty$</u>:

- Podobně jako v části (a) vytváříme součty, které jsou postupně ≤ -1, ≤ -2, ≤ -3, atd.

(c) <u>konverguje</u> k předem zvolenému reálnému číslu: Zvolme si nejprve nějaké číslo $s\in\mathbb{R}$, ke kterému má přerovnaná řada konvergovat (např. $s=7553$).

- Nejprve vezměme tolik kladný členů, až je jejich součet $\boxed{\geq s}$.
- Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq s}$.
- Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet $\boxed{\geq s}$.
- Přidejme nyní tolik dalších záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq s}$.
- ...

Uvědomte si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici s, protože součet kladných členů je ∞ a součet záporných členů je $-\infty$.

A protože přidáváme stále se (v absolutní hodnotě) zmenšující se členy, výsledný součet po takových krocích „přeskakuje" zvolenou hodnotu s a současně se k číslu s nekonečně blíží. Současně tímto způsobem vyčerpáme všechny členy původní řady. Tedy takto přerovnaná řada konverguje právě k číslu s.

(d) osiluje: Můžeme si dokonce zvolit, mezi jakými mezemi bude přerovnaná řada oscilovat. Zvolme si proto libovolná dvě čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (např. $a = -2$ a $b = 3$).

- Nejprve vezměme tolik kladný členů, až je jejich součet $\boxed{\geq b}$.
- Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq a}$.
- Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet $\boxed{\geq b}$.
- Přidejme nyní tolik dalších záporných členů, až je výsledný součet $\boxed{\leq a}$.
- ...

Uvědomte si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovené hranice b a a, protože součet kladných členů je ∞ a součet záporných členů je $-\infty$.

A protože přidáváme stále se (v absolutní hodnotě) zmenšující se členy, výsledný součet po takových krocích „přeskakuje" zvolené hodnoty b (shora) a a (zdola). Současně tímto způsobem vyčerpáme všechny členy původní řady. Tedy takto přerovnaná řada osciluje (mezi čísly a a b).

Takže u relativně konvergentních řad nelze v žádném případě měnit pořadí jednotlivých členů, zatímco u absolutně konvergentních řad lze pořadí jednotlivých členů měnit libovolně. □

Příklad 153.

(a) V tomto příkladu si ukážeme, že i když obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \,.\, b_n)$ konvergovat nemusí.

Uvažujme nekonečné řady, kde $a_n = b_n := (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Potom jsou příslušné nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergentní, což plyne Leibnitzova kritéria (viz Věta 46), zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \,.\, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k ∞, viz Příklad 139.

(b) Na druhou stranu může nastat i situace, že takováto řada součinů $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \,.\, c_n)$ konverguje, přestože jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje. Vezměme si např. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

která diverguje k ∞ (viz Příklad 140, kde $p = \frac{1}{2}$), zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \,.\, c_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

konverguje podle Věty 46.

□

4.5. **Mocninné řady.** V odstavci 2.19 jsme ukázali, jak k dané funkci $f(x)$ přiřadit Taylorův polynom stupně n (se středem v daném bodě x_0), který aproximuje funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0. V Poznámce 18 jsme pak naznačili, že lze takto získat i polynom „nekonečného stupně“, neboli nekonečnou mocninnou řadu.

Definice 27 (Mocninná řada). Nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \dots$$

se nazývá mocninná řada se středem v bodě $x_0 = 0$.

Podobně, nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n = a_0 + a_1\,(x-x_0) + a_2\,(x-x_0)^2 + a_3\,(x-x_0)^3 + \dots$$

se nazývá mocninná řada se středem v bodě x_0.

Bod x_0 se nazývá střed mocninné řady a čísla $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ její koeficienty. □

Jedná se vlastně o zobecnění pojmu polynom do té roviny, že nyní povolujeme i „polynomy stupně ∞“.

Příklad 154.

(a) Pokud vezmeme všechny koeficienty $a_n = 1$ a $x_0 = 0$, dostaneme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots.$$

Tato řada je geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = x$ a tedy podle Tvrzení 10 tato řada konverguje pro $|x| < 1$, přičemž její součet je $\frac{1}{1-x}$. Tuto skutečnost budeme vyjadřovat zápisem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \boxed{\frac{1}{1-x}} \qquad \text{pro } x \in (-1, 1). \tag{57}$$

Všimněte si, že tato řada diverguje k ∞ pro $x = 1$ a osciluje pro $x = -1$ a tedy otevřený interval uvedený v (57) je maximální možný interval konvergence pro tuto mocninnou řadu.

(b) Podobně, mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

je geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = -x$ a tedy podle Tvrzení 10 tato řada konverguje pro $|x| < 1$, přičemž její součet je $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$. Tedy platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \boxed{\frac{1}{1+x}} \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Všimněte si, že tato řada osciluje pro $x = 1$ a diverguje k ∞ pro $x = -1$ a tedy uvedený otevřený interval je maximální možný interval konvergence pro tuto mocninnou řadu.

(c) Mocninná řada s $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ a středem $x_0 = 2$ je řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \dots,$$

která je také geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = -\frac{x-2}{2}$. Tedy podle Tvrzení 10 tato řada konverguje pro $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$, tj. pro $x \in (0, 4)$, přičemž její součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{2+x-2}{2}} = \boxed{\frac{2}{x}} \qquad \text{pro } x \in (0, 4).$$

$\square$

Z výše uvedených příkladů je vidět, že součet mocninné řady je <u>funkce</u> $s(x)$ proměnné x, přičemž je potřeba určit jak součet řady $s(x)$ tak i pro která $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje.

Při studiu konvergence mocninných řad budeme používat kritéria z odstavce 4.2, která aplikujeme na příslušnou řadu absolutních hodnot (protože se jedná o kritéria pro nekonečné řady s nezápornými členy). Zřejmě takto získáme informaci o <u>absolutní konvergenci</u> dané mocninné řady.

Příklad 155. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots.$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n}\right| = \frac{n}{n+1} |x| \to |x| \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy pro $|x| < 1$ tato řada konverguje (absolutně) a pro $|x| > 1$ nekonverguje (zřejmě pro $x < -1$ diverguje k $-\infty$ a pro $x > 1$ osciluje).

Pro $x = -1$ se jedná o zápornou harmonickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right),$$

která diverguje k $-\infty$. A pro $x = 1$ se jedná o alternující harmonickou řadu, která konverguje (relativně).

Celkově tedy uvedená mocninná řada $\boxed{\text{konverguje pro } x \in (-1, 1]}$, přičemž pro $x \in (-1, 1)$ konverguje absolutně.

V Příkladu 163 pak určíme součet této mocninné řady. □

Příklad 156. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots .$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2(n+1)-1} x^{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2n-1} x^{2n-1}} \right| = \frac{2n-1}{2n+1} \left| x^2 \right| \to x^2 \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy pro $x^2 < 1$ tato řada konverguje (absolutně) a pro $x^2 > 1$ nekonverguje (zřejmě osciluje).

Pro $x = 1$ se jedná o alternující řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots , \tag{58}$$

která konverguje (relativně) podle Věty 46. A pro $x = -1$ se jedná o řadu s opačnými znaménky, než je řada (58), tedy se opět jedná o alternující řadu, která konverguje (relativně). V Příkladu 164 určíme součet této řady.

Celkově tedy uvedená mocninná řada $\boxed{\text{konverguje pro } x \in [-1, 1]}$, přičemž pro $x \in (-1, 1)$ konverguje absolutně. □

Příklad 157. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots .$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} |x| = \frac{1}{n+1} |x| \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy tato řada $\boxed{\text{konverguje (absolutně) a pro každé } x \in \mathbb{R}}$.

Zřejmě jste již odhadli, že součet této mocninné řady je funkce e^x. □

Příklad 158. Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2\,x^2 + 6\,x^3 + 24\,x^4 + 120\,x^5 + \dots .$$

Řešení. Podle podílového kritéria (Věta 44) je

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = (n+1)\,|x| \to \infty \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy tato řada $\boxed{\text{konverguje pouze pro } x = 0}$ a nekonverguje pro každé $x \neq 0$. Zřejmě diverguje k ∞ pro $x > 0$ a osciluje pro $x < 0$. □

4.6. **Poloměr konvergence mocninné řady.** Každá mocninná řada konverguje ve svém středu, protože pro $x = x_0$ se jedná o nulovou řadu. Dále ze srovnávacího kritéria (Věta 42) plyne následující.

Tvrzení 12. *Uvažujme mocninnou řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n = a_0 + a_1\,(x-x_0) + a_2\,(x-x_0)^2 + a_3\,(x-x_0)^3 + \dots . \tag{59}$$

(i) *Jestliže tato mocninná řada konverguje pro nějaké $x = c$, potom konverguje absolutně pro všechna $|x| < |c|$.*

(ii) *Jestliže tato řada nekonverguje (tj. diverguje k $\pm\infty$ nebo osciluje) pro nějaké $x = d$, potom nekonverguje pro všechna $|x| > |d|$.*

Graficky lze obsah Tvrzení 12 znázornit následovně (viz obr.). Tedy pro každou mocninnou řadu (59) nastává právě jedna z následujících možností:

- Existuje číslo $R > 0$ takové, že tato mocninná řada konverguje absolutně pro $|x - x_0| < R$, tj. pro $\boxed{x \in (x_0 - R, x_0 + R)}$ a nekonverguje pro $|x - x_0| > R$, tj. pro $x < x_0 - R$ a pro $x > x_0 + R$. Řada může a nemusí konvergovat v každém z krajních bodů $x = x_0 - R$ a $x = x_0 + R$.

- Tato mocninná řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (v tomto případě klademe $R := \infty$).

- Tato mocninná řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a nekonverguje pro všechna $x \neq 0$ (v tomto případě klademe $R := 0$).

Číslo R mající výše popsané vlastnosti nazýváme poloměr konvergence mocninné řady (59). Pokud je $R > 0$ (tj. pokud nastane první nebo druhá z výše uvedených možností), potom hovoříme o intervalu konvergence či o konvergenčním intervalu.

Příklad 159.

(a) Pro mocninné řady (viz Příklady 154(a), (b))

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n$$

je poloměr konvergence $\boxed{R=1}$.

(b) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 154(c))

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\,(x-2)^n$$

je poloměr konvergence $\boxed{R=2}$.

(c) Pro mocninné řady (viz Příklady 155 a 156)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

je poloměr konvergence $\boxed{R=1}$.

(d) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 157)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

je poloměr konvergence $\boxed{R=\infty}$.

(e) Pro mocninnou řadu (viz Příklad 158)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

je poloměr konvergence $\boxed{R=0}$.

$\square$

Pro poloměr konvergence R mocninné řady platí následující.

Věta 48 (O poloměru konvergence mocninné řady). *Pokud existuje limita (vlastní nebo nevlastní)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \qquad \textit{případně} \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a, \tag{60}$$

potom poloměr konvergence mocninné řady (59) *je*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & \textit{pro } a > 0,\\ \infty, & \textit{pro } a = 0,\\ 0, & \textit{pro } a = \infty. \end{cases}$$

Důkaz. Vztah pro poloměr konvergence R plyne z podílového kritéria (Věta 44), resp. z odmocninového kritéria (Věta 45). Pokud totiž existuje limita v (60), potom je

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}\,(x-x_0)^{n+1}}{a_n\,(x-x_0)^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |x-x_0| \to a\,.\,|x-x_0| \qquad \text{pro } n\to\infty,$$

resp.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n\,(x-x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,\sqrt[n]{|x-x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,|x-x_0| \to a\,.\,|x-x_0| \qquad \text{pro } n\to\infty.$$

Tedy mocninná řada konverguje (absolutně), pokud je $a\,.\,|x-x_0|<1$, a nekonverguje, pokud je $a\,.\,|x-x_0|>1$. Pro $a\,.\,|x-x_0|=1$ konvergovat může i nemusí.

To znamená, že pokud je $a>0$, řada konverguje pro $|x-x_0|<\frac{1}{a}$ a nekonverguje pro $|x-x_0|>\frac{1}{a}$, neboli $R=\frac{1}{a}$.

Pokud je $a=0$, je $a\,.\,|x-x_0|=0<1$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, a tedy řada konverguje pro všechna $x\in\mathbb{R}$, neboli $R=\infty$.

A pokud je $a=\infty$, je $a\,.\,|x-x_0|=\infty>1$ pro všechna $x\neq x_0$, neboli řada nekonveguje pro všechna $x\neq x_0$, neboli $R=0$. □

Poznámka 35.

(i) Předpoklad existence limity v (60) je příliš silný. Lze ukázat, že stačí místo limity použít limitu superior (která existuje vždy), tj.

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a, \qquad \text{případně} \qquad \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=a.$$

(ii) Z Poznámky 33 plyne, že pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=a$, potom také existuje limita $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a$ (a tyto dvě limity jsou si rovny).

(iii) Může ale nastat situace, že $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a$ existuje, zatímco $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ neexistuje (viz např. Příklady 144 a 145). Je tedy vidět, že stačí vždy počítat poloměr konvergence pomocí vzorečku s $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a$ (pokud tedy tato limita existuje jako vlastní nebo jako nevlastní).

□

Příklad 160.

(a) Pro mocninné řady z Příkladu 159(a) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1,$$

a proto je podle Věty 48 (kde $a=1$) jejich poloměr konvergence roven $\boxed{R=1}$. Všimněte si, že podle Poznámky 35(ii) je také

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

(b) Pro mocninnou řadu z Příkladu 159(b) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

a proto je podle Věty 48 (kde $a=\frac{1}{2}$) její poloměr konvergence roven $\boxed{R=2}$. Všimněte si, že podle Poznámky 35(ii) je také

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) Pro mocninné řady z Příkladu 159(c) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = 1,$$

a proto je podle Věty 48 (kde $a=1$) jejich poloměr konvergence roven $\boxed{R=1}$. Všimněte si, že podle Poznámky 35(ii) je také

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \overset{\text{Věta 5(ii)}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} \overset{(54)}{=} 1,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} = 1,$$

přičemž poslední limita se spočítá l'Hospitalovým pravidlem podobně jako (54).

(d) Pro mocninnou řadu z Příkladu 159(d) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

a proto je podle Věty 48 (kde $a=0$) její poloměr konvergence roven $\boxed{R=\infty}$.

(e) Pro mocninnou řadu z Příkladu 159(e) platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

a proto je podle Věty 48 (kde $a=\infty$) její poloměr konvergence roven $\boxed{R=0}$.

□

Mocninné řady (jakožto „polynomy“ nekonečného stupně) sdílejí s polynomy všechny důležité vlastnosti. Zejména, jak uvidíme níže,

– součet mocninné řady je spojitá funkce,

– mocninnou řadu můžeme derivovat člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence,

– mocninnou řadu můžeme integrovat (neurčitým i určitým integrálem) člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence.

Pro jednoduchost uvádíme tyto vlastnosti pro mocniiné řady se středem v bodě $x_0 = 0$, ale evidentně tyto vlastnosti platí pro mocninné řady s libovolným středem x_0, přičemž konvergenční interval se změní z $(-R, R)$ na interval $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Věta 49 (Spojitost mocninné řady).

(i) *Nechť má mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$ *(*$R \in \mathbb{R}$ *nebo* $R = \infty$*), tj.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = s(x) \qquad \text{pro } x \in (-R, R).$$

Potom je součet $s(x)$ *této řady spojitá funkce na intervalu* $(-R, R)$*.*

(ii) *Je-li* $R < \infty$ *a je-li tato řada konvergentní v pravém krajním bodě* $x = R$*, potom je součet* $s(x)$ *funkce spojitá zleva v bodě* $x = R$*, tj. platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, R^n = \lim_{x \to R^-} s(x).$$

(iii) *Je-li* $R < \infty$ *a je-li tato řada konvergentní v levém krajním bodě* $x = -R$*, potom je součet* $s(x)$ *funkce spojitá zprava v bodě* $x = -R$*, tj. platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (-R)^n = \lim_{x \to -R^+} s(x).$$

Příklad 161. V Příkladu 154 vidíme, že součet mocninné řady je spojitá funkce na příslušném konvergenčním intervalu. Vlastnost z bodu (ii) ve Větě 49 budeme ilustrovat v Příkladu 163 (tento příklad vyžaduje „znalost“ integrování mocninné řady, kterou probereme níže ve Větě 51). □

Věta 50 (Derivace mocninné řady). *Nechť má mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *poloměr konvergence* $R > 0$ *(*$R \in \mathbb{R}$ *nebo* $R = \infty$*), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + \dots \qquad \text{pro } x \in (-R, R).$$

Potom má funkce $s(x)$ *na intervalu* $(-R, R)$ *derivace všech řádů, přičemž platí*

$$\begin{aligned} s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} &= a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + 4\, a_4\, x^3 + \dots \qquad \text{pro } x \in (-R, R), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n. \end{aligned}$$

Tedy mocninnou řadu můžeme derivovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a derivace), přičemž se nemění poloměr konvergence.

Důkaz. Ukažme si alespoň, že se při derivování mocninné řady nemění poloměr konvergence. Nechť a je číslo z Věty 48, které určuje poloměr konvergence R (původní řady). Potom pro derivovanou řadu platí

$$\frac{(n+2)\, a_{n+2}}{(n+1)\, a_{n+1}} = \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}_{\to a} \overset{(8)}{\to} 1\,.\, a = a \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

Tedy podle Věty 48 je poloměr konvergence derivované řady roven R, tj. je stejný, jako je poloměr konvergence původní řady. □

Poznámka 36. Pro derivace vyšších řádů pak platí podobně

$$
\begin{aligned}
s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2} &= 2\,a_2 + 6\,a_3\,x + 12\,a_4\,x^2 + 20\,a_5\,x^3 + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\,a_{n+2}\,x^n,
\end{aligned}
$$

a podobně pro $s'''(x)$, $s^{(4)}(x)$, atd.

Zejména tedy můžeme vyšetřovat vlastnosti mocninné řady z kapitoly 2 na intervalu $(-R, R)$ týkající se monotonie, lokálních extrémů, konvexnosti/konkávnosti, inflexních bodů, atd. $\square$

Příklad 162. Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4 + \ldots .$$

Pomocí získaného výsledku určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots .$$

Řešení. Poloměr konvergence určíme z Věty 48:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1 = a, \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{a} = 1.$$

Tedy řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a zřejmě nekonverguje v krajních bodech tohoto intervalu.

Protože je $n\,x^{n-1} = (x^n)'$, součet této řady určíme z věty o derivaci mocninné řady (Věta 50):

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n &= x \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \,.\, \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x \,.\, \left(\frac{x}{1-x}\right)' \\
&= x \,.\, \frac{1}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}}.
\end{aligned}
$$

Volbou $x = \frac{1}{2}$ pak dostáváme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \boxed{2}.$$

$\square$

Věta 51 (Neurčitý integrál mocninné řady). *Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ poloměr konvergence $R > 0$ ($R \in \mathbb{R}$ nebo $R = \infty$), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + \ldots \qquad \textit{pro } x \in (-R, R).$$

Potom na intervalu $(-R, R)$ platí

$$\int s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_0\,x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} + \cdots + C \qquad \textit{pro } x \in (-R, R),$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C.$$

Tedy mocninnou řadu můžeme integrovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a integrování), přičemž se nemění poloměr konvergence.

Příklad 163. Určete součet mocninné řady (viz Příklad 155)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

a tedy pro $x = 1$ také součet alternující harmonické řady (viz Příklady 149 a 148)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Řešení. V Příkladu 155 jsme ukázali, že tato mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1]$. Protože je $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n\,dx$, součet této řady určíme z věty o integraci mocninné řady (Věta 51):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int x^n\,dx \right) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) dx$$
$$= \int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) + C \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Protože je pro $x = 0$ tato mocninná řada konvergentní se součtem 0 (každá mocninná řada má ve svém středu součet 0), po dosazení za $x = 0$ dostaneme rovnici $0 = \ln 1 + C$, tedy $C = 0$. Je tedy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = \ln(1+x)} \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

A dále, protože tato řada konverguje v pravém krajním bodě $x = 1$ (je to alternující harmonická řada), je podle věty o spojitosti mocninné řady (Věta 49(ii))

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \boxed{\ln 2}, \qquad \text{tj.} \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

□

Příklad 164. Určete součet mocninné řady (viz Příklad 156)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots.$$

Řešení. Z Příkladu 156 víme, že tato řada konverguje pro $x \in [-1,1]$ a konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$. Protože je $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int x^{2n}\,dx$, součet této řady určíme z věty o integraci mocninné řady (Věta 51):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int x^{2n}\,dx \right) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\,x^2 \right)^n \right) dx$$
$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C \qquad \text{pro } x \in (-1,1).$$

Protože je pro $x = 0$ tato mocninná řada konvergentní se součtem 0 (každá mocninná řada má ve svém středu součet 0), po dosazení za $x = 0$ dostaneme rovnici $0 = \operatorname{arctg} 0 + C$, tedy $C = 0$. Je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1} = \operatorname{arctg} x \qquad \text{pro } x \in (-1,1).$$

A dále, protože tato řada konverguje v pravém krajním bodě $x = 1$, je podle věty o spojitosti mocninné řady (Věta 49(ii))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots .$$

Podobný vztah platí pro $x = -1$, protože tato mocninná řada konverguje i v levém krajním bodě $x = -1$.

Celkově tedy platí vztah

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1} = \operatorname{arctg} x} \qquad \text{pro } x \in [-1,1].$$

□

Věta 52 (Určitý integrál mocninné řady). *Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ poloměr konvergence $R > 0$ ($R \in \mathbb{R}$ nebo $R = \infty$), tj.*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + \dots \qquad \textit{pro } x \in (-R,R).$$

Potom pro libovolný interval $[a,b] \subseteq (-R,R)$ platí

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_a^b x^n\,dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, \frac{b^{n+1}}{n+1} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, \frac{a^{n+1}}{n+1} \right).$$

Tedy mocninnou řadu můžeme integrovat člen po členu (tedy lze zaměnit pořadí sumace a integrování).

Příklad 165. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n} = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,2^2} + \frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{4\,.\,2^4} + \frac{1}{5\,.\,2^5} + \dots .$$

Řešení. Protože platí

$$\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,dx,$$

je podle věty o určitém integálu mocninné řady (Věta 52)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,dx\right) = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= \big[-\ln(1-x)\big]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - (-\ln 1) = -\ln\frac{1}{2} = -\ln 2^{-1} = \boxed{\ln 2}.$$

Tedy platí, že

$$\ln 2 = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,2^2} + \frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{4\,.\,2^4} + \frac{1}{5\,.\,2^5} + \dots.$$

□

`Konec 10. přednášky (30.4.2007)`

4.7. **Taylorovy a Maclaurinovy řady.** Pokud se v Taylorově polynomu (viz odstavec 2.19) budou brát členy se stále vyššími derivacemi (až do nekonečna), dostaneme Taylorovu řadu příslušnou k dané funkci $f(x)$.

Definice 28 (**Taylorova a Maclaurinova řada).** Nechť $f(x)$ je funkce, která má na nějakém intervalu (obsahujícím bod x_0 jakožto vnitřní bod) derivace všech řádů. Taylorova řada se středem v bodě x_0 příslušná k funkci $f(x)$ je mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \tag{61}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}\,(x-x_0)^4 + \dots.$$

Tzn. Taylorova řada je mocninná řada se středem v bodě x_0 a koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Pokud je $x_0 = 0$, potom se Taylorova řada nazývá Maclaurinovou řadou příslušnou k funkci $f(x)$, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 + \dots.$$

Tzn. Maclaurinova řada je mocninná řada se středem v bodě 0 a koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. □

V předchozí definici si připomeňme zavednou konvenci, že $f^{(0)}(x) := f(x)$ („nultá derivace“ je samotná funkce) a že je definováno $0! := 1$.

Příklad 166.

(a) Protože má funkce $f(x) = \sin x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\sin x$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, atd. (viz Příklad 76), Maclaurinova řada pro funkci $\sin x$ je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots .$$

Její poloměr konvergence je $R = \infty$ (podle Věty 48), tj. tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(b) Protože má funkce $f(x) = \cos x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\cos x$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0 atd. (viz Příklad 77), Maclaurinova řada pro funkci $\cos x$ je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots .$$

Její poloměr konvergence je $R = \infty$ (podle Věty 48), tj. tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(c) Protože má funkce $f(x) = e^x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce e^x a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou všechny rovny 1 (viz Příklad 78), Maclaurinova řada pro funkci e^x je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots .$$

Její poloměr konvergence je $R = \infty$ (viz Příklady 157 a 159(d)), tj. tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(d) Protože má funkce $f(x) = \ln(1+x)$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\ln(1+x)$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně rovny 0, 1, -1, 2, -6, 24, -120 (viz Příklad 79), Maclaurinova řada pro funkci $\ln(1+x)$ je tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Srovnejte tento výsledek s mocninnou řadou v Příkladu 163. Tato řada konverguje pro všechna $x \in (-1, 1]$ (viz Příklad 155).

□

Příklad 167. Určete Taylorovu řadu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ se středem v bodě $x_0 = 2$. Dále určete obor konvergence této mocninné řady a případně její součet.

Řešení. Derivace funkce $f(x)$ a její hodnoty v bodě 2 jsou následující:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1}, & f(2) &= \tfrac{1}{2} = \tfrac{0!}{2^1},\\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(2) &= -\tfrac{1}{4} = -\tfrac{1!}{2^2},\\
f''(x) &= 2\,x^{-3}, & f''(2) &= \tfrac{2}{8} = \tfrac{2!}{2^3},\\
f'''(x) &= -6\,x^{-4}, & f'''(2) &= -\tfrac{6}{16} = -\tfrac{3!}{2^4},\\
f^{(4)}(x) &= 24\,x^{-5}, & f^{(4)}(2) &= \tfrac{24}{32} = \tfrac{4!}{2^5},\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}, & f^{(n)}(2) &= \tfrac{(-1)^n\, n!}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Koeficient a_n v Taylorově řadě tedy je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}},$$

a proto má příslušná Taylorova řada se středem v bodě 2 tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,(x-2)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\,(x-2) + \frac{1}{2^3}\,(x-2)^2 - \frac{1}{2^4}\,(x-2)^3 + \frac{1}{2^5}\,(x-2)^4 - \dots .$$

Uvedená mocninná řada je geometrická řada s počátečním členem $a = \frac{1}{2}$ a kvocientem $q = -\frac{x-2}{2}$ (srovnejte s podobnou řadou v Příkladu 154). Tedy podle Tvrzení 10 tato řada konverguje pro $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$, tj. pro $|x-2| < 2$, tj. pro $x \in (0,4)$, a její součet je

$$\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x} = f(x).$$

Alternativně lze poloměr konvergence uvedené řady spočítat z Věty 48, čili

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = a, \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{a} = 2.$$

V tomto příkladu tedy vidíme, že Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje na svém konvergenčním intervalu k funkci $f(x)$. □

Z definice Taylorovy řady (61) plyne, že tato řada konverguje k číslu $f(x_0)$ pro $x = x_0$ (protože každá mocninná řada konverguje ve svém středu).

Situace v předchozím Příkladu 167 ohledně konvergence Taylorovy (či Maclaurinovy) řady k samotné funkci $f(x)$ je „obvyklá“ pro většinu funkcí. Existují ale také funkce, které mají derivace všech řádů (tudíž k nim existuje Taylorova řada), tato Taylorova řada konverguje, ale již ne k funkci $f(x)$ (kromě bodu x_0).

Příklad 168. Funkce

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je spojitá a má derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. V bodě $x_0 = 0$ toto lze ukázat pomocí výpočtu jednostranných derivací $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$, $f''_-(0)$ a $f''_+(0)$, atd., viz Poznámka 4(ii). Zejména jsou všechny tyto derivace v bodě $x_0 = 0$ rovny 0. Tedy příslušná Maclaurinova řada je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = 0 + 0\,.\,x + \frac{0}{2}\,x^2 + \frac{0}{3!}\,x^3 + \dots = \boxed{0}.$$

Tedy jedná se o nulovou řadu, která samozřejmě konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ k nulové funkci $s(x) \equiv 0$, která není rovna původní funkci $f(x)$. □

Otázku, kdy Taylorova (Maclaurinova) řada funkce $f(x)$ konverguje k funkci $f(x)$, zodpovídá následující tvrzení, které je bezprostředním důsledkem Věty 23.

Věta 53 (O konvergenci Taylorovy řady).

(i) *Taylorova řada (61) funkce $f(x)$ konverguje na svém konvergenčním intervalu I k funkci $f(x)$, tj. platí rovnost*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \qquad \textit{pro všechna } x \in I, \tag{62}$$

$\Leftrightarrow$ *pro posloupnost Taylorových zbytků $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (viz (36)) platí*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \textit{pro všechna } x \in I.$$

(ii) *Zejména, pokud jsou všechny derivace $f^{(n)}(x)$ stejně ohraničené na intervalu I, tj. pokud pro nějaké $M > 0$ je*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M \qquad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \textit{ a pro všechna } x \in I,$$

potom platí (62).

Příklad 169. Uveďme si přehled Maclaurinových řad pro některé elementární funkce, se kterými se často setkáváme.

(a) Pro funkci $f(x) = \sin x$ platí (viz Příklad 166(a))

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 + \ldots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}}\,.$$

(b) Pro funkci $f(x) = \cos x$ platí (viz Příklad 166(b))

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 - \frac{1}{6!}\,x^6 + \ldots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}}\,.$$

(c) Pro funkci $f(x) = e^x$ platí (viz Příklad 166(c))

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{4!}\,x^4 + \frac{1}{5!}\,x^5 + \ldots \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}}\,.$$

(d) Pro funkci $f(x) = \ln(1+x)$ platí (viz Příklady 166(d) a 163)

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{5}\,x^5 + \ldots \qquad \text{pro } x \in (-1, 1]}\,.$$

(e) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1-x}$ platí (viz Příklad 154(a))

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \qquad \text{pro } x \in (-1, 1)}\,.$$

(f) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ platí (viz Příklad 154(b))

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots \qquad \text{pro } x \in (-1, 1)}\,.$$

(g) Každý polynom $P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n$ je svým vlastním Maclaurinovým rozvojem (na celém $\mathbb{R}$), neboť platí, že

$$P(0) = a_0, \quad P'(0) = a_1, \quad P''(0) = 2\,a_2, \quad P'''(0) = 2\,.\,3\,.\,a_3 = 3!\,a_3, \quad \ldots, P^{(n)}(0) = n!\,a_n.$$

□

Výše uvedené rozvoje elementárních funkcí do nekonečných řad bychom také mohli chápat jako <u>definice</u> těchto funkcí (jak je skutečně provedeno ve skriptech prof. Slováka). A pak lze pomocí vlastností (např. spojitosti, derivace, integrálu, atd.) mocninných řad uvedených v této kapitole také odvodit základní vlastnosti a vztahy těchto elementárních funkcí, jako např.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = \sin x, \quad (e^x)' = e^x, \quad \ldots .$$

Pro rozvoje funkcí do nekonečných řad můžeme používat normální algebraická pravidla (sčítání, odčítání, násobení, substituce).

Příklad 170.

(a) Maclaurinova řada funkce $x\,\sin x$ je (pro rozvoj funkce $\sin x$ viz Příklad 169(a))

$$\begin{aligned} x\,\sin x &= x\,.\left(x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 + \ldots\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3!}\,x^4 + \frac{1}{5!}\,x^6 - \frac{1}{7!}\,x^8 + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+2}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Maclaurinova řada funkce $\frac{\sin x}{x}$ je (pro rozvoj funkce $\sin x$ viz Příklad 169(a))

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 + \ldots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3!}\,x^2 + \frac{1}{5!}\,x^4 - \frac{1}{7!}\,x^6 + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v tohoto vzorce je snadné odvodit limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (viz Příklad 23).

(c) Maclaurinova řada funkce e^{-x^2} je (pro rozvoj funkce e^x viz Příklad 169(c))

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \left(1 + t + \frac{1}{2!}\,t^2 + \frac{1}{3!}\,t^3 + \frac{1}{4!}\,t^4 + \frac{1}{5!}\,t^5 + \ldots\right)\Bigg|_{t=-x^2} \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}\,x^4 - \frac{1}{3!}\,x^6 + \frac{1}{4!}\,x^8 - \frac{1}{5!}\,x^{10} + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,x^{2n}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

4.8. **Aplikace nekonečných řad.** Nekonečné (číselné i mocninné) řady mají mnoho aplikací. Nebudu zacházet do přílišných podrobností, ale chci zmínit alespoň následující.

- Přibližné výpočty funkčních hodnot – srovnejte např. s Příklady 74 a 170.
- Aproximace funkcí – srovnejte např. s Příklady 169 a 81.
- Výpočet integrálů vyšších funkcí – viz Poznámka 23.

Příklad 171.

(a) Primitivní funkce k funkci $\frac{\sin x}{x}$ je funkce (viz Příklad 170(b))

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \int \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3!}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{5!}\frac{x^6}{6} - \frac{1}{7!}\frac{x^8}{8} + \dots + C = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n+2} + C}.$$

(b) Primitivní funkce k funkci e^{-x^2} je funkce (viz Příklad 170(c))

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{5!}x^{10} + \dots\right)dx$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!}\frac{x^9}{9} - \frac{1}{5!}\frac{x^{11}}{11} + \dots + C$$
$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,.\,(2n+1)}x^{2n+1} + C}.$$

□

- Výpočet limit – viz např. Příklad 170(b).
- Řešení některých diferenciálních rovnic – viz např. Příklad 191.
- Jen tak pro zajímavost

Příklad 172. Určete součet číselné řady (viz Příklad 141)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots.$$

Řešení. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ má rozvoj (viz Příklad 170(b))

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots. \tag{63}$$

Kořeny této funkce jsou zřejmě v bodech $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, atd. a tedy tuto funkci lze „rozložit“ na (nekonečný) součin kořenových činitelů

$$\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{4\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{4\pi}\right)\cdots$$
$$= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots. \tag{64}$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^2 v rozvoji (63) a (po roznásobení) v (64) dostaneme

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots,$$

čili po vynásobení číslem $-\pi^2$ dostaneme

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Jen pro zajímavost, tuto úvahu provedl Leonhard Euler již v 18. století. □

Poznámka 37. Protože je $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, plyne ze vzorců (63) a (64) volbou $x = \frac{\pi}{2}$ vyjádření

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{\pi}{2}} &= \left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi}\right)\cdot\left(1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi}\right)\cdot\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{4\pi}\right)\cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{6}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{8}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{8}\right)\cdots \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots,
\end{aligned}$$

neboli dostáváme známý Wallisův vzorec

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

pro vyjádření čísla $\frac{\pi}{2}$ (a tedy i čísla π) pomocí nekonečného součinu.

Nekonečné součiny (a otázky spojené s jejich konvergencí) ale v tomto kurzu neprobíráme, tak to berte jen jako zajímavost. □

4.9. **Řady funkcí.** Stejně jako když jsme studovali mocninné řady, tj. řady „generované" mocninami x^n s koeficienty a_n, můžeme studovat řady „generované" jinými funkcemi. Např. Fourierovy řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big),$$

případně můžeme uvažovat obecné řady funkcí (či funkcionální řady)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

přičemž $f_n(x)$ jsou funkce definované na nějakém (společném) intervalu I. V této souvislosti je pak přirozené klást otázky týkající se konvergence takové funkcionální řady, tj. pro která $x \in I$ je definována funkce

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

a jaké vlastnosti funkce $s(x)$ bude mít (zejména týkající se spojitosti, derivace a primitivní funkce – viz příslušné Věty 49, 50, 51 a 52 o mocninných řadách).

Stejně jako u mocninných či číselných řad je při studiu obecných funkcionálních řad potřeba vyřešit otázku konvergence posloupnosti částečných součtů

$$s_n(x) := f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x),$$

tj. za jakých podmínek a na jakém intervalu konverguje (funkcionální) posloupnost $s_n(x)$ k funkci $s(x)$, tj. $s_n(x) \to s(x)$ pro $x \in I$. Pro každé pevně zvolené $x \in I$ se ale jedná o číselnou posloupnost (či řadu), a proto můžeme použít všechny nástroje počínaje odstavcem 4.1. Hovoříme pak o bodové konvergenci dané funkcionální řady.

Ovšem je nutné zdůraznit, že již nejjednodušší vlastnosti (jako např. spojitost) funkcí $f_n(x)$ (a tedy i funkcí $s_n(x)$) se při takové bodové konvergenci nepřenášejí na součtovou funkci $s(x)$.

Příklad 173. Uvažujme funkce $s_n(x) := x^n$ pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (viz obr.). Jedná se tedy o posloupnost částečných součtů

$$s_0(x) = 1, \quad s_1(x) = x, \quad s_2(x) = x^2, \quad s_3(x) = x^3, \quad s_4(x) = x^4, \quad \ldots .$$

Všechny tyto funkce $s_n(x)$ jsou spojité na intervalu $[0,1]$. Přitom

$$\text{pro } x \in [0,1) \text{ je } \quad s_n(x) = x^n \to 0, \qquad \text{a pro } x = 1 \text{ je } \quad s_n(x) = 1^n \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Tedy posloupnost $s_n(x)$ bodově konverguje na intervalu $[0,1]$ k funkci

$$s(x) := \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in [0,1), \\ 1, & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

přičemž tato funkce $s(x)$ je nespojitá (viz obr.). □

Z Příkladu 173 je tedy vidět, že pro obecné funkcionální řady je potřeba silnější pojem konvergence, než je bodová konvergence, který bude zaručovat přenos vlastností funkcí $f_n(x)$ na součtovou funkci $s(x)$. Tímto se dostáváme k termínu stejnoměrné konvergence na intervalu I k dalším pokročilejším partiím matematické analýzy. V tomto základním kurzu ale na tyto věci již není prostor.

5. Elementární diferenciální rovnice

Tato kapitola je zaměřena na použití diferenciálního a integrálního počtu pro řešení některých jednoduchých diferenciálních rovnic.

5.1. **Úvod a motivace.** Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se vyskytuje neznámá funkce spolu se svou derivací (či derivacemi vyšších řádů).

Diferenciální rovnice slouží k modelování fyzikálních procesů (viz také konec odstavce 2.7), vyskytují se v ekonomii, biologii, chemii, atd.

Příklad 174. Příklady fyzikálních procesů, které jsou modelovány diferenciálními rovnicemi.

(a) Neznámá funkce je $u = u(x)$ (poloha bodu na přímce),
$$m\,.\,u'' = F(x) \qquad \text{(Newtonův zákon)}.$$

(b) Neznámá funkce je $u = u(x,t)$ (teplota v bodě x na přímce v čase t),
$$\alpha^2\,.\,u_{xx} = u_t \qquad \text{(vedení tepla na přímce)}.$$

(c) Neznámá funkce je $u = u(x,t)$ (vychýlení v bodě x na přímce v čase t),
$$\alpha^2\,.\,u_{xx} = u_{tt} \qquad \text{(vlnová rovnice)}.$$

(d) Neznámá funkce je $\theta = \theta(t)$ (úhel v čase t),
$$\theta'' + \alpha\,\sin\theta = 0 \qquad \text{(matematické kyvadlo)}.$$

(e) Neznámá funkce je $Q = Q(t)$ (množství radioaktivního materiálu v čase t),
$$Q' = -k\,Q \qquad \text{(radioaktivní rozpad)}.$$

□

Otázky k zamyšlení:

1. Jak poznáme, že daná diferenciální rovnice vůbec má řešení? (otázka existence řešení)
2. Je toto řešení jediné? (otázka jednoznačnosti řešení)
3. Kolik řešení existuje?
4. Jak najít toto/tato řešení? (metody řešení diferenciálních rovnic)
5. Jak určit chování případných řešení, aniž by bylo nutné danou diferenciální rovnici vyřešit? (kvalitativní vlastnosti řešení diferenciálních rovnic)

Příklad 175. Diferenciální rovnice $x\,y' + y = 0$ má řešení $y = \frac{C}{x}$ pro libovolné $C \in \mathbb{R}$, protože
$$y' = (Cx^{-1})' = -\frac{C}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad x\,y' + y = x\left(-\frac{C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} = 0.$$
Tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. □

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (případně funkce $y = y(t)$, $y = y(x, t)$, apod.), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic se obvykle najdou pomocí integrování, a proto budou obsahovat integrační konstanty (zřejmě tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. obecné řešení (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá partikulární.

Příklad 176. Obecné řešení diferenciální rovnice z Příkladu 175 je

$$y = \frac{C}{x}, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Řešení této diferenciální rovnice splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$ je $y = \frac{1}{x}$ (tohle je tedy partikulární řešení). □

Příklad 177. Matematicky lze každý příklad na výpočet primitivní funkce (neurčitý integrál, viz odstavec 3.1) chápat jako diferenciální rovnici $y' = f(x)$, přičemž hledaná neznámá funkce y se vypočítá jako $y = \int f(x)\,dx$, tedy přímým integrováním. □

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Příklad 178. Tedy diferenciální rovnice z Příkladu 174(a–d) jsou druhého řádu, zatímco rovnice v Příkladu 174(e) je prvního řádu. □

5.2. **Diferenciální rovnice 1. řádu.** V tomto odstavci se budeme podrobněji zabývat deferenciálními rovnicemi 1. řádu. Tj. jsou to rovnice tvaru

$$y' = F(x, y). \tag{65}$$

Příklad 179.

(a) Rovnice $y' = y^2$ má nekonečně mnoho řešení (tedy obecné řešení)

$$y = \frac{1}{C - x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

definovaných na $(-\infty, C)$ a na (C, ∞) a řešení $y = 0$ definované na celém $\mathbb{R}$.

(b) Rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ a počáteční podmínka $y(0) = 0$ má řešení $y = 0$ a $y = x^3$ (a také libovolnou jejich navazující kombinaci, viz obr.). Tedy existuje nekonečně mnoho řešení.

□

Poznámka 38. V obecné teorii diferenciálních rovnic lze ukázat, že pokud je pravá strana rovnice (65) spojitá, potom řešení počáteční úlohy s touto rovnicí a podmínkou $y(x_0) = y_0$ skutečně existuje a je jediné – ale pouze v dostatečně malém okolí bodu x_0.

Navíc je zřejmé, že toto řešení bude spojité podle Věty 9 a bude mít spojitou derivaci, protože $y' = F(x, y)$ je spojitá funkce, jak předpokládáme. □

Speciálními případy této diferenciální rovnice jsou rovnice se separovanými proměnnými a rovnice lineární, kterým se budeme blíže věnovat.

`Konec 11. přednášky (3.5.2007 -- místo 7.5.2007)`

5.3. **Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.** Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = f(x)\,.\,g(y),$$

tj. pravá strana z obecné rovnice (65) je $F(x, y) = f(x)\,.\,g(y)$, tj. je to součin funkce proměnné x a funkce proměnné y (odtud je název této rovnice).

Příklad 180.

(a) Pro diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x^2}{y\,.\,(1 + x^3)} \qquad \text{je} \qquad f(x) = \frac{x^2}{1 + x^3}, \quad g(y) = \frac{1}{y},$$

a proto se jedná o rovnici se separovanými proměnnými.

(b) Rovnice v Příkladech 177 a 179 jsou všechny se separovanými proměnnými.

(c) Rovnice $y' = x + y$ není rovnice se separovanými proměnnými

□

Pokud napíšeme derivaci y' jako podíl diferenciálů $\frac{dy}{dx}$, tj. $y' = \frac{dy}{dx}$, potom lze rovnici se separovanými proměnnými přepsat na tvar

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,.\,g(y), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx,$$

odtud název – separované proměnné. A tuto poslední rovnici vyřešíme integrací na obou stranách – na levé straně podle proměnné y a na pravé straně podle proměnné x, tj.

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C}. \tag{66}$$

Integrační konstantu lze zřejmě brát pouze jednou, např. tedy na pravé straně. Dostáváme tedy následující tvrzení.

Tvrzení 13 (**O řešitelnosti diferenciální rovnice se separovanými proměnnými).** *Jsou-li funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ spojité a $g(y) \neq 0$ na intervalu (c, d), potom má počáteční úloha*

$$y' = f(x)\,.\,g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je dáno implicitně vztahem (66). Konstanta C se určí z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.

Příklad 181. Pro diferenciální rovnici z Příkladu 180 máme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y\,.\,(1+x^3)} \quad \Rightarrow \quad y\,dy = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int y\,dy = \int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \left| \begin{array}{l} 1+x^3 = u \\ 3x^2\,dx = du \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y^2 = \frac{2}{3}\ln|1+x^3| + C}.$$

Pokud je navíc zadána počáteční podmínka $y(0) = 2$, potom dosazením do vypočteného vztahu za $x = 0$ a $y = 2$ dostaneme rovnici $4 = C$, a tedy partikulární řešení je

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{2}{3}\ln|1+x^3| + 4}}$$

(ve výše uvedeném vztahu bereme kladnou odmocninu, protože hodnota $y(0) = 2 > 0$). □

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici se separovanými proměnnými. Např. diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$ (Pozor, $u = u(x)$ je funkce proměnné x!) převede na rovnici se separovanými proměnnými. Skutečně, protože je (podle pravidla pro derivaci součinu, viz Věta 10(iii))

$$u\,.\,x = y \quad \Rightarrow \quad u'\,.\,x + u = y' \quad \Rightarrow \quad u'\,.\,x + u = f(u)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}\,x = f(u) - u \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f(u) - u}\,du = \frac{1}{x}\,dx$$

a poslední uvedená rovnice má separované proměnné (x a u).

Příklad 182. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Řešení. Volbou $u = \frac{y}{x}$, neboli $y = u\,.\,x$, dostaneme $y' = u'\,.\,x + u$ a po desazení do rovnice

$$u'\,.\,x + u = 1 + u \quad \Rightarrow \quad u'\,.\,x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}\,.\,x = 1$$

$$\Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int du = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad u = \ln|x| + C.$$

Zpětným dosazením za proměnnou u pak dostaneme hledané řešení

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x\,\ln|x| + C\,x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) □

5.4. **Lineární diferenciální rovnice 1. řádu.** Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

tj. pravá strana z obecné rovnice (65) je $F(x,y) = a(x)\, y + b(x)$, tj. je to lineární funkce vzhledem k proměnné y.

Příklad 183.

(a) Rovnice v Příkladu 174(e) je lineární ($a(x) = -k$ je konstanta a $b(x) \equiv 0$).

(b) Rovnice v Příkladech 179 a 180(a,b) nejsou lineární.

(c) Rovnice v Příkladu 180(c) je lineární.

□

Lineární diferenciální rovnici lze jednoduchým způsobem vyřešit.

- Rovnice je tzv. homogenní, tj. $b(x) \equiv 0$. Potom se jedná o rovnici $y' = a(x)\, y$, což je rovnice se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = a(x)\, y \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\, dy = a(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int a(x)\, dx \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = \int a(x)\, dx + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{\int a(x)\, dx + C} = e^{\int a(x)\, dx} \,.\, e^C \\
&\Rightarrow \quad \pm y = e^{\int a(x)\, dx} \,.\, e^C \quad \Rightarrow \quad y = e^{\int a(x)\, dx} \,.\, \underbrace{\left(\pm e^C\right)}_{\text{lib. konst.}} \\
&\Rightarrow \quad \boxed{y = C\, e^{\int a(x)\, dx}}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{67}$$

- Rovnice je tzv. nehomogenní, tj. $b(x) \not\equiv 0$. V tomto případě se nejprve celá rovnice vynásobí vhodnou funkcí $\mu(x)$ (tzv. integračním faktorem), aby po úpravách vznikl výraz pro derivaci součinu. Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) := e^{-\int a(x)\, dx}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
y' - a(x)\, y = b(x) \quad &\Rightarrow \quad \big[y' - a(x)\, y\big] \,.\, \mu(x) = b(x) \,.\, \mu(x) \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{y' \,.\, e^{-\int a(x)\, dx} - y\, a(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}}_{\left(y \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}\right)'} = b(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx} \\
&\Rightarrow \quad \left(y \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}\right)' = b(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx} \\
&\Rightarrow \quad y \,.\, e^{-\int a(x)\, dx} = \int b(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}\, dx + C \\
&\Rightarrow \quad \boxed{y = e^{\int a(x)\, dx} \left[\int b(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}\, dx + C\right]}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Tedy jsme dokázali následující tvrzení.

Tvrzení 14 (O řešitelnosti lineární diferenciální rovnice 1. řádu). *Jsou-li koeficienty $a(x)$ a $b(x)$ spojité funkce na intervalu (a,b), potom má počáteční úloha*

$$y' = a(x)\,y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je na celém intervalu (a,b) definováno vztahem (68). Konstanta C se určí z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.

Tedy vidíme, že na rozdíl od nelineárních rovnic, které mají zaručenu existenci a jednoznačnost řešení pouze na okolí bodu x_0 (viz Poznámka 38), jsou lineární diferenciální rovnice jednoznačně řešitelné na celém intervalu spojitosti pravé strany rovnice.

Příklad 184. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = -3y + x.$$

Řešení. Protože je $y' + 3y = x$, je integrační faktor

$$\mu(x) = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}.$$

Potom platí

$$\underbrace{y'\,e^{3x} + 3y\,e^{3x}}_{\left(y\,.\,e^{3x}\right)'} = x\,e^{3x} \qquad \Rightarrow \qquad \left(y\,.\,e^{3x}\right)' = x\,e^{3x}$$

$$\Rightarrow \qquad y\,.\,e^{3x} = \int x\,e^{3x}\,dx + C \;\left|\begin{array}{ll} u' = e^{3x} & u = \frac{e^{3x}}{3} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right| = \frac{1}{3}\,x\,e^{3x} - \frac{1}{9}\,e^{3x} + C$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) □

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici lineární. Například tzv. Bernoulliova rovnice

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^r$$

se pomocí substituce $u = y^{1-r}$ (Pozor, $u = u(x)$ je funkce proměnné x!) převede na rovnici lineární.

Příklad 185. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = -3y + x\,y^2.$$

Řešení. Jedná se zřejmě o Bernoulliovu rovnici s $r = 2$. Substitucí $u = y^{-1} = \frac{1}{y}$ dostaneme $u' = -y^{-2}y' = \frac{y'}{y^2}$ a tedy daná rovnice se převede na tvar

$$y' = -3y + x\,y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{y^2} = -3\,\frac{1}{y} + x \qquad \Rightarrow \qquad u' = -3u + x.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u(x)$. Z Příkladu 184 víme, že její řešení je funkce

$$u = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x}.$$

Zpětným dosazením za funkci u pak dostaneme řešení původní rovnice

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = \frac{1}{\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x}}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice.) □

Dalším trikem, který někdy může pomoci převést danou rovnici na lineární diferenciální rovnici, je záměna nezávislé a závislé peoměnné x a y. Tedy místo hledání řešení jako funkce $y = y(x)$ jej budeme hledat jako funkci $x = x(y)$. Výsledkem potom zřejmě bude řešení zadané pomocí inverzní funkce.

Příklad 186. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y^2 - 2x}.$$

Řešení. Tato rovnice není lineární diferenciální rovnice. Platí ale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - 2x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = -2x + y^2,$$

přičemž poslední rovnice už je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $x = x(y)$. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru, tj. $\mu(y) = e^{2y}$. Řešení je potom tvaru (po dvojnásobné integraci per-partes v integrálu $\int y^2\,e^{2y}\,dy$)

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{4} + C\,e^{-2y}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Ověřte si derivováním, že tato funkce je skutečně řešením dané rovnice. Derivaci y' získáte z pravidla pro derivování implicitní funkce, viz odstavec 2.12.) □

5.5. **Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.** V tomto odstavci probereme (na ukázku) tři aplikace lineárních diferenciálních rovnic.

• Radioaktivní rozpad – Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu.

Tedy označíme-li jako $Q(t)$ množství [většinou gramů] radioaktivního materiálu v čase t [roků], potom musí platit rovnice

$$\boxed{Q'(t) = -r\,Q(t)}, \qquad \text{kde } r > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že materiálu zřejmě ubývá, tj. $Q' < 0$.

Příklad 187 (Radioaktivní rozpad). Rádium–226 má poločas rozpadu 1620 let. Najděte čas potřebný k tomu, aby se dané množství Ra–226 zmenšilo na $\frac{3}{4}$ původního množství.

Řešení. Označíme-li jako $Q(0) := Q_0$ původní množství Ra–226, potom pro hledanou funkci $Q(t)$, která splňuje (homogenní) lineární diferenciální rovnici $Q' = -r\,Q$, platí (viz (67))

$$Q(t) = C\,e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad Q(0) = C\,e^0 = C \quad \Rightarrow \quad C = Q_0 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0\,e^{-rt}.$$

Nyní určíme konstantu r z informace o poločasu rozpadu:

$$\frac{1}{2}\,Q_0 = Q_0\,e^{-r\,.\,1620} \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{1}{2} = -r\,.\,1620 \quad\Rightarrow\quad r = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{1620} = \frac{\ln 2}{1620} \approx 0.000428\ [\text{let}^{-1}].$$

A nyní určíme hodnotu t, pro kterou je $Q(t) = \frac{3}{4}\,Q_0$:

$$\frac{3}{4}\,Q_0 = Q_0\,e^{-rt} \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{3}{4} = -rt \quad\Rightarrow\quad t = \frac{\ln\frac{3}{4}}{-r} = -\frac{1620\,\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \approx \boxed{672.4\ [\text{let}]}.$$

□

• Výměna tepla mezi tělesem a okolím – Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (tzv. Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako T [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí vyšší, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí nižší, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Příklad 188 (Detektivní kancelář). Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí.

Řešení. Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3, \qquad \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)}, \qquad \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad\Rightarrow\quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnije je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru $\mu(t) = e^{kt}$, tj. podle (68) je

$$\Theta = T + C\,e^{-kt} = 18.3 + C\,e^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Konstanty C a k určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + C\,e^0 = 18.3 + C \quad\Rightarrow\quad C = 8.3 \quad\Rightarrow\quad \Theta = 18.3 + 8.3\,e^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\,e^{-3k} \quad\Rightarrow\quad e^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337 \quad\Rightarrow\quad -3k = \ln 0.337$$

$$\Rightarrow\quad k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\boxed{\Theta(t) = 18.3 + 8.3\,e^{-0.362t}}.$$

Jak se určí čas úmrtí? Určíme čas t, pro který je $\Theta(t) = 37$ °C (teplota lidského těla). Tedy

$$18.3 + 8.3\,e^{-0.362t} = 37 \quad\Rightarrow\quad e^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253 \quad\Rightarrow\quad -0.362t = \ln 2.253$$

$$\Rightarrow\quad t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24 \approx -\boxed{2\text{ hodiny }15\text{ minut}}.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. □

• <u>Míchání dvou látek</u> – např. voda a do ní roztok soli, nebo voda (jezero) a do ní nečistoty z továrny, atd.

Příklad 189 (Míchání roztoku). Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí (viz obr.). Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \to \infty$.

Řešení. Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase t [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže <u>přitéká</u> rychlostí

$$c\,.\,v = 50 \;\; [\text{g/l}] \;\; .\; 20 \;\; [\text{l/min}] \;\; = 1000 \;\; [\text{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže <u>vytéká</u> rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L}\,.\,v = \frac{Q(t)}{1000} \;\; [\text{g/l}] \;\; .\; 20 \;\; [\text{l/min}] \;\; = \frac{Q(t)}{50} \;\; [\text{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c\,.\,v - \frac{Q(t)}{L}\,.\,v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0. \tag{69}$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = e^{\int \frac{v}{L}\,dt} = e^{\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = e^{\int \frac{1}{50}\,dt} = e^{0.02\,t}$$

a potom je (výpočty uvádím jak pro obecnou situaci tak i pro náš konkrétní příklad)

$$\begin{aligned} Q' + \frac{v}{L}\,Q = c\,v \qquad &\Rightarrow \qquad Q' + 0.02\,Q = 1000, \\ Q'\,e^{\frac{v}{L}\,t} + \frac{v}{L}\,e^{\frac{v}{L}\,t}\,Q = c\,v\,e^{\frac{v}{L}\,t} \qquad &\Rightarrow \qquad Q'\,e^{0.02\,t} + 0.02\;e^{0.02\,t}\,Q = 1000\,e^{0.02\,t}, \\ \left(Q\,e^{\frac{v}{L}\,t}\right)' = c\,v\,e^{\frac{v}{L}\,t} \qquad &\Rightarrow \qquad \left(Q\,e^{0.02\,t}\right)' = 1000\,e^{0.02\,t}, \\ Q\,e^{\frac{v}{L}\,t} = \int c\,v\,e^{\frac{v}{L}\,t}\,dt = c\,v\,\frac{e^{\frac{v}{L}\,t}}{\frac{v}{L}} + C \qquad &\Rightarrow \qquad Q\,e^{0.02\,t} = \int 1000\,e^{0.02\,t}\,dt = 1000\,\frac{e^{0.02\,t}}{0.02} + C, \\ \boxed{Q = c\,L + C\,e^{-\frac{v}{L}\,t}} \qquad &\Rightarrow \qquad \boxed{Q = 50000 + C\,e^{-0.02\,t}}, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A protože je počáteční množství známo v (69), pro integrační konstantu C platí

$$\begin{aligned} Q_0 = Q(t_0) = c\,L + C\,e^{-\frac{v}{L}\,t_0} \qquad &\Rightarrow \qquad 0 = Q(0) = 50000 + C\,e^{0}, \\ C = (Q_0 - c\,L)\,e^{\frac{v}{L}\,t_0} \qquad &\Rightarrow \qquad C = -50000, \end{aligned}$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\, e^{\frac{v}{L}\,t_0}\, e^{-\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000 - 50000\, e^{-0.02\,t},$$

$$\boxed{Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\, e^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q = 50000\,\left(1 - e^{-0.02\,t}\right)}.$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\,L$ nebo $Q_0 < c\,L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\,L$ zůstává stále stejné.

Pro situaci v tomto příkladu je výsledné množství soli zobrazeno v souboru <graf_michani.pdf>

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \{c\,L + (Q_0 - c\,L)\,\underbrace{e^{-\frac{v}{L}\,(t-t_0)}}_{\to 0}\} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} 50000\,(1 - \underbrace{e^{-0.02\,t}}_{\to 0})$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\,L \quad [\mathrm{g}]} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]}.$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \qquad \text{neboli} \qquad Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přítékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství Q_0, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). □

Příklad 190 (Míchání roztoku – pokračování). Jak se změní model v předchozím Příkladu 189, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min] (viz obr.)? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

Řešení. Všimněte si, že se nyní objem roztoku v nádrži mění (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže vytéká rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)}\,.\,w = \frac{Q(t)}{1000+t} \quad [\mathrm{g/l}] \;\;.\;\; 19 \quad [\mathrm{l/min}] \quad = \frac{19\,Q(t)}{1000+t} \quad [\mathrm{g/min}].$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c\,.\,v - \frac{Q(t)}{L + (v-w)\,(t-t_0)}\,.\,w \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{19\,Q(t)}{1000+t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (69). Příslušný integrační faktor je (nyní již pouze pro naše konkrétní hodnoty)

$$\mu(t) = e^{\int \frac{19}{1000+t}\,dt} = e^{19\,\ln(1000+t)} = e^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000+t)^{19}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
Q' + \frac{19\,Q(t)}{1000+t} = 1000 \quad &\Rightarrow \quad Q'\,(1000+t)^{19} + 19\,Q(t)\,(1000+t)^{18} = 1000\,(1000+t)^{19} \\
&\Rightarrow \quad \left[Q\,(1000+t)^{19}\right]' = 1000\,(1000+t)^{19} \\
&\Rightarrow \quad Q\,(1000+t)^{19} = \int 1000\,(1000+t)^{19}\,dt = 1000\,\frac{(1000+t)^{20}}{20} + C \\
&\Rightarrow \quad Q = \frac{50\,(1000+t)^{20} + C}{(1000+t)^{19}} = \boxed{50\,(1000+t) + \frac{C}{(1000+t)^{19}}}.
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (69) pak určíme hodnotu C, tj.

$$0 = Q(0) = 50\,.\,1000 + \frac{C}{1000^{19}} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000\,.\,1000^{19} = -5\,.\,10^4\,.\,\left(10^3\right)^{19} = -5\,.\,10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$\boxed{Q = 50\,(1000+t) - \frac{5\,.\,10^{61}}{(1000+t)^{19}}},$$

jehož graf je zobrazen v souboru <graf_michani2.pdf>.

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50\,(1600) - \frac{5\,.\,10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \quad [\mathrm{g}] \text{ soli},$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \quad [\mathrm{g/l}],$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. □

5.6. **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu.** Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x),$$

kde funkce $a, b, c, f : I \to \mathbb{R}$ jsou koeficienty v této rovnici.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu mají podobné vlastnosti jako lineární rovnice 1. řádu, zejména jejich řešení existují a jsou určena jednoznačně – na celém intervalu spojitosti koeficientů rovnice – pomocí dvou počátečních podmínek

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1,$$

tj. je zadána hodnota funkce a její derivace (neboli bod v rovině, kterým musí řešení projít, a pak sklon, pod kterým musí řešení tímto bodem projít).

O těchto rovnicích existuje velké množství literatury, obvykle se studují zejména rovnice s konstantními koeficienty

$$a\,y'' + b\,y' + cy = f(x),$$

které mají mnoho aplikací např. při modelování mechanického a elektromagnetického kmitání.

Pro ilustraci uveďme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme (bez jakýchkoliv dalších znalostí teorie diferenciálních rovnic) pomocí nekonečných řad.

Příklad 191. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = 0$$

pomocí nekonečných řad.

Řešení. Hledejme řešení této rovnice ve tvaru mocninné řady

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Potom podle pravidla pro derivaci mocninné řady (Věta 50) platí

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\,(n+1)\,x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n\,(n-1)\,x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\,x^n.$$

Dosazením do rovnice $y'' + y = 0$ dostáváme

$$0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\,x^n}_{y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n}_{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n\right] x^n$$

Tedy poslední uvedená řada je mocninná řada pro konstantní funkci $s(x) \equiv 0$, a proto musí všechny její koeficienty být nulové, tj.

$$a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n = 0 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Odtud vychází rekurentní vztah pro jednotlivé koeficienty

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)\,(n+1)} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy jsou-li koeficienty a_0 a a_1 dány (všimněte si, že $a_0 = y(0)$ a $a_1 = y'(0)$, tj. tyto koeficienty jsou dány počátečními podmínkami ve středu hledané mocninné řady), potom je

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2}, & a_3 &= -\frac{a_1}{3\,.\,2}, \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4\,.\,3} = \frac{a_0}{4!}, & a_5 &= -\frac{a_3}{5\,.\,4} = \frac{a_1}{5!}, \\
a_6 &= -\frac{a_4}{6\,.\,5} = -\frac{a_0}{6!}, & a_7 &= -\frac{a_5}{7\,.\,6} = -\frac{a_1}{7!}, \\
&\vdots & &\vdots \\
a_{2k} &= (-1)^k\,\frac{a_0}{(2k)!}, & a_{2k+1} &= (-1)^k\,\frac{a_1}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Celkově je tedy hledané řešení tvaru

$$
\begin{aligned}
y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n &= a_0 + a_1\, x - \frac{a_0}{2!}\, x^2 - \frac{a_1}{3!}\, x^3 + \frac{a_0}{4!}\, x^4 + \frac{a_1}{5!}\, x^5 - \frac{a_0}{6!}\, x^6 - \frac{a_1}{7!}\, x^7 + \dots \\
&= a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 - \frac{1}{6!}\, x^6 + \dots + (-1)^k\, \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} + \dots \right\} \\
&\qquad + a_1 \left\{ x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \frac{1}{7!}\, x^7 + \dots + (-1)^k\, \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \dots \right\} \\
&= \boxed{a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \right\}}.
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že hledané obecné řešení je lineární kombinací dvou funkcí (viz Příklad 169)

$$
\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} = \cos x, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = \sin x,
$$

přičemž uvedené mocninné řady konvergují pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (jejich poloměr konvergence je $R = \infty$). Neboli obecné řešení uvedené diferenciální rovnice je (položíme-li $C := a_0$ a $D := a_1$)

$$
\boxed{y = C\, \cos x + D\, \sin x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad C, D \in \mathbb{R}.
$$

(Ověřte si zderivováním, že tato funkce je skutečně řešením pro libovolné konstanty $C, D \in \mathbb{R}$.) $\square$

Konec 12. přednášky (14.5.2007)

Konec dokumentu